Limites de fonctions

Fiche tableaux : les limites à connaître
(Spécialité maths Terminale)

Limites de référence

Fonction	**en $-\infty$**	**en 0**	**en $+\infty$**
x^n	$+\infty$ si n pair, $-\infty$ si n impair	0	$+\infty$
$\dfrac{1}{x^n}$	0	en 0^+ : $+\infty$; en 0^- : $+\infty$ si n pair, $-\infty$ si n impair	0
$\sqrt{x}$	non définie	0	$+\infty$
e^x	0	1	$+\infty$

Exemple : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^4}\right)=1$, car $\dfrac{1}{x^4}\to 0$. Composée : avec $X=1+\dfrac{1}{x^4}\to 1$, on obtient $\sqrt{X}\to 1$ et $e^X\to e$; si $X\to-\infty$, $e^X\to 0$.

Somme

$\lim f$	$\lim g$	$\lim(f+g)$
ℓ	ℓ'	$\ell+\ell'$
ℓ	$+\infty$	$+\infty$
ℓ	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	**FI**

Exemple : $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x+\sqrt{x})=+\infty$. Forme indéterminée : $x^3-4x=x^3\left(1-\dfrac{4}{x^2}\right)\to+\infty$ en $+\infty$.

Produit

$\lim f$	$\lim g$	$\lim(fg)$
ℓ	ℓ'	$\ell\ell'$
$\ell\neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$ (règle des signes)
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$ (règle des signes)
0	$\pm\infty$	**FI**

Exemple : $\lim\limits_{x\to-\infty}(-4x)=+\infty$ (« $(-4)\times(-\infty)$ »).

Quotient

$\lim f$	$\lim g$	$\lim \dfrac{f}{g}$
ℓ	$\ell' \neq 0$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$
ℓ	$\pm\infty$	0
$\pm\infty$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$ (règle des signes)
$\ell \neq 0$ ou $\pm\infty$	0^+ ou 0^-	$\pm\infty$ (règle des signes)
$\pm\infty$	$\pm\infty$	**FI**
0	0	**FI**

Exemple : $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{3}{1-x} = -\infty$, car $1 - x \to 0^-$ pour $x > 1$.

Formes indéterminées : que faire ?

Situation	**Méthode**
Polynôme ou fonction rationnelle en $\pm\infty$	factoriser (en haut et en bas) par le terme de plus haut degré
« $\dfrac{0}{0}$ » en un réel a	factoriser par $(x-a)$ et simplifier, ou quantité conjuguée s'il y a une racine
Exponentielle contre puissance de x	mettre e^x en facteur, croissances comparées
Présence de $\sin x$ ou $\cos x$	comparaison ou gendarmes

Croissances comparées

Fonction ($n \geqslant 1$)	**Limite**	**Où**
$\dfrac{e^x}{x^n}$	$+\infty$	en $+\infty$
$\dfrac{x^n}{e^x} = x^n e^{-x}$	0	en $+\infty$
$x^n e^x$	0	en $-\infty$

Exemple : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^6 e^{-x} = 0$.

Comparaison, gendarmes, asymptotes

Si…	**et si…**	**alors…**
$f(x) \geqslant g(x)$ pour x assez grand	$g(x) \to +\infty$	$f(x) \to +\infty$
$f(x) \leqslant h(x)$ pour x assez grand	$h(x) \to -\infty$	$f(x) \to -\infty$
$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$	$g(x) \to \ell$ et $h(x) \to \ell$	$f(x) \to \ell$ (gendarmes)
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \ell$	—	asymptote horizontale $y = \ell$
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$	(à gauche ou à droite)	asymptote verticale $x = a$

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).