

Devoir surveillé – Limites de fonctions

Comportement asymptotique des fonctions, opérations sur les limites et comparaison — programme de Terminale Spécialité Maths

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Nom : _____

Date : _____

Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Limites de référence et opérations

(4 pts)

a) a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(6x^4 - \frac{1}{x^2} \right)$

c) c) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x} + 5 \right)$

b) b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{3x} - 2)$

d) d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (7 - \sqrt{x})$

Exercice 2 – Fonction homographique et asymptotes

(4 pts)

a) a) Soit $f(x) = \frac{5x - 2}{x + 4}$. Donner l'ensemble de définition de f , puis déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) b) Déterminer les limites de f à gauche et à droite de la valeur interdite.

c) c) Donner les équations des asymptotes à la courbe de f .

d) d) Montrer que $f(x) - 5 = \frac{-22}{x + 4}$ et en déduire la position de la courbe par rapport à son asymptote horizontale.

Exercice 3 – Formes indéterminées

(4 pts)

a) a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^3 - 7x^2 + 1)$.

b) b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x^2 - 3x}{2x^2 + 7}$.

c) c) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 8x} - x)$.

d) d) Un élève écrit : « $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x^2 - 3x}{2x^2 + 7} = \frac{+\infty}{+\infty} = 1$ ». Expliquer ce qui ne va pas.

Exercice 4 – Comparaison et gendarmes

(4 pts)

a) a) Soit $f(x) = x^2 + 3 \cos x$. Montrer que $f(x) \geq x^2 - 3$ pour tout réel x , puis déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b) b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x + 5}{x}$.

c) c) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \sin x$.

d) d) Soit $k(x) = \frac{3 - 2 \cos x}{x^2 + 2}$. Encadrer $k(x)$ pour tout réel x et en déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x)$.

Exercice 5 – Fonction avec exponentielle*(4 pts)*

- a) a) Soit $g(x) = (x + 3)e^{-x}$ définie sur $\mathbb{R}$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ en justifiant.
- b) b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.
- c) c) Donner une asymptote à la courbe de g et préciser sur quel intervalle la courbe est au-dessus de cette asymptote.
- d) d) Calculer $g'(x)$ et en déduire la valeur exacte du maximum de g sur $\mathbb{R}$.

Bon courage !