

## Corrigé et barème – Limites de fonctions

Comportement asymptotique des fonctions, opérations sur les limites et comparaison — programme de Terminale Spécialité Maths

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

### Exercice 1 – Limites de référence et opérations

(4 pts)

- a)  $6x^4 \rightarrow +\infty$  et  $\frac{1}{x^2} \rightarrow 0$  : la limite vaut  $+\infty$ . (1)
- b)  $3x \rightarrow -\infty$  donc  $e^{3x} \rightarrow 0$  : la limite vaut  $-2$ . (1)
- c)  $\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$  (dénominateur  $0^-$ ) : la limite vaut  $-\infty$ . (1)
- d)  $\sqrt{x} \rightarrow +\infty$  donc  $-\sqrt{x} \rightarrow -\infty$  : la limite vaut  $-\infty$ . (1)

**Repère** — Dans une somme sans indétermination, le terme qui tend vers l'infini impose la limite ; une constante ne change rien.

### Exercice 2 – Fonction homographique et asymptotes

(4 pts)

- a)  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$ . Pour  $x \neq 0$ ,  $f(x) = \frac{5-\frac{2}{x}}{1+\frac{4}{x}} \rightarrow 5$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ . (1)
- b) En  $-4$ ,  $5x - 2 \rightarrow -22$ . Pour  $x < -4$ ,  $x + 4 \rightarrow 0^-$  donc  $f(x) \rightarrow +\infty$  ; pour  $x > -4$ ,  $x + 4 \rightarrow 0^+$  donc  $f(x) \rightarrow -\infty$ . (1)
- c) Asymptote horizontale  $y = 5$  (en  $\pm\infty$ ) et asymptote verticale  $x = -4$ . (1)
- d)  $f(x) - 5 = \frac{5x-2-5x-20}{x+4} = \frac{-22}{x+4}$  : négatif si  $x > -4$  (courbe en dessous), positif si  $x < -4$  (courbe au-dessus). (1)

**Erreur fréquente** — Écrire une seule limite en  $-4$  : il y en a deux, de signes opposés, selon le côté d'où l'on s'approche.

### Exercice 3 – Formes indéterminées

(4 pts)

- a)  $3x^3 - 7x^2 + 1 = x^3 \left(3 - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^3}\right)$  ;  $x^3 \rightarrow -\infty$  et la parenthèse  $\rightarrow 3$  : limite  $-\infty$ . (1)
- b)  $\frac{x^2(9-\frac{3}{x})}{x^2(2+\frac{7}{x^2})} = \frac{9-\frac{3}{x}}{2+\frac{7}{x^2}} \rightarrow \frac{9}{2}$ . (1)
- c) Forme «  $\infty - \infty$  ». Quantité conjuguée, pour  $x > 0$  :  $\sqrt{x^2 + 8x} - x = \frac{(x^2+8x)-x^2}{\sqrt{x^2+8x}+x} = \frac{8x}{\sqrt{x^2+8x}+x}$ . Or  $\sqrt{x^2 + 8x} = x\sqrt{1 + \frac{8}{x}}$ , donc le quotient vaut  $\frac{8}{\sqrt{1+\frac{8}{x}}+1} \rightarrow \frac{8}{2} = 4$ . (1)
- d) «  $\frac{\infty}{\infty}$  » est une forme indéterminée : on ne peut pas lui attribuer de valeur, et certainement pas 1 par défaut. Il faut factoriser les termes dominants, ce qui donne  $\frac{9}{2}$ . (1)

**Le point clé** — Une forme indéterminée n'est pas une réponse : elle signale qu'il faut transformer l'expression avant de conclure.

**Exercice 4 – Comparaison et gendarmes**

(4 pts)

- a)  $\cos x \geq -1$  donc  $3 \cos x \geq -3$  et  $f(x) \geq x^2 - 3$ . Or  $x^2 - 3 \rightarrow +\infty$  : par comparaison,  $f(x) \rightarrow +\infty$ . (1)
- b) Pour  $x > 0$  :  $\frac{4}{x} \leq \frac{\sin x + 5}{x} \leq \frac{6}{x}$  ; les deux bornes tendent vers 0, donc la limite vaut 0 (gendarmes). (1)
- c)  $-e^{-x} \leq e^{-x} \sin x \leq e^{-x}$  car  $e^{-x} > 0$  ;  $e^{-x} \rightarrow 0$  en  $+\infty$  : par les gendarmes, la limite vaut 0. (1)
- d)  $-1 \leq \cos x \leq 1$  donc  $1 \leq 3 - 2 \cos x \leq 5$ , et  $x^2 + 2 > 0$  :  $\frac{1}{x^2+2} \leq k(x) \leq \frac{5}{x^2+2}$ . Les deux bornes tendent vers 0 en  $-\infty$  :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = 0$ . (1)

**Attention** — On n'écrit jamais «  $\lim \cos x$  » ou «  $\lim \sin x$  » en l'infini : ces fonctions n'ont pas de limite, on les encadre.

**Exercice 5 – Fonction avec exponentielle**

(4 pts)

- a)  $g(x) = x e^{-x} + 3e^{-x} = \frac{x}{e^x} + 3e^{-x}$  ; par croissance comparée  $\frac{x}{e^x} \rightarrow 0$ , et  $e^{-x} \rightarrow 0$  :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ . (1)
- b)  $x + 3 \rightarrow -\infty$  et  $e^{-x} \rightarrow +\infty$  (car  $-x \rightarrow +\infty$ ) : par produit,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ . (1)
- c) La droite  $y = 0$  est asymptote horizontale en  $+\infty$ .  $g(x)$  a le signe de  $x + 3$  : la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses sur  $] -3; +\infty[$ . (1)
- d)  $g'(x) = e^{-x} - (x + 3)e^{-x} = (-x - 2)e^{-x}$ , du signe de  $-x - 2$  : positif avant  $-2$ , négatif après. Maximum  $g(-2) = (1)e^2 = e^2 \approx 7,39$ . (1)

**Astuce** — Devant  $x e^{-x}$  en  $+\infty$ , réécrire  $\frac{x}{e^x}$  pour reconnaître immédiatement la croissance comparée.