

Intégration

L'intégration permet de calculer des aires, des distances, des coûts cumulés et des valeurs moyennes ; il faut savoir trouver une primitive, calculer une intégrale, intégrer par parties et encadrer.

1 Définitions

- **Primitive** de f sur I : fonction F dérivable telle que $F' = f$. Les primitives diffèrent d'une constante ; une seule vérifie $F(x_0) = y_0$.
- **Intégrale** : pour f continue sur $[a ; b]$ et F primitive, $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$. Si $f \geq 0$, c'est l'aire sous la courbe en unités d'aire.
- **Théorème fondamental** : $\int_a^x f(t) dt$ est la primitive de f nulle en a .
- **Valeur moyenne** sur $[a ; b]$: $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$.

2 Primitives usuelles

- $x^n \rightarrow \frac{x^{n+1}}{n+1} \ (n \neq -1)$; $\frac{1}{x^2} \rightarrow -\frac{1}{x}$; $\frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 2\sqrt{x}$.
- $e^{ax} \rightarrow \frac{1}{a} e^{ax}$; $\cos x \rightarrow \sin x$; $\sin x \rightarrow -\cos x$.
- Formes composées : $u^n \rightarrow \frac{u^{n+1}}{n+1}$; $\frac{u'}{u} \rightarrow \ln u \ (u > 0)$; $u e^u \rightarrow e^u$; $\frac{u'}{\sqrt{u}} \rightarrow 2\sqrt{u}$.

3 Propriétés

- $\int_a^a f = 0$; $\int_b^a f = -\int_a^b f$.
- Linéarité : $\int (\lambda f + g) = \lambda \int f + \int g$. Chasles : $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.
- Pour $a \leq b$: $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$; $f \leq g \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$; $m \leq f \leq M \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$.
- IPP : $\int_a^b u'v = uv \Big|_a^b - \int_a^b u v'$.

4 Méthodes

1. **Calculer une intégrale** : reconnaître la forme, écrire une primitive, calculer $F(b) - F(a)$, vérifier en dérivant.
2. **Aire** : si $f \leq 0$, aire $= -\int_a^b f$; entre deux courbes, aire $= \int_a^b (f - g)$ avec $f \geq g$; découper avec Chasles si le signe change ; convertir en cm^2 (unité en $x \times$ unité en y).
3. **IPP** : dériver le polynôme ou $\ln$, intégrer e^{kx} , $\cos$, $\sin$ ou 1 .
4. **Suite d'intégrales** : monotonie en comparant les intégrandes ; limite par encadrement $0 \leq I_n \leq \frac{c}{n+1}$; récurrence par IPP.

5 Pièges

- Pas de formule pour $\int fg$: forme composée ou IPP.
- Une aire est positive, une intégrale peut être négative.
- $\ln u$ exige $u > 0$; sur $]-\infty ; 0[$, primitive de $\frac{1}{x}$: $\ln(-x)$.
- Positivité et ordre supposent $a \leq b$.
- $\Big(\int_a^x f(t) dt\Big)' = f(x)$: on ne dérive pas f .

L'ESSENTIEL

- Si $F' = f$ sur $[a ; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.
- Pour f continue positive, l'intégrale est l'aire sous la courbe en unités d'aire.
- Valeur moyenne : $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

- IPP : $\int_a^b u'v = uv \Big|_a^b - \int_a^b u v'$.
- Si $f \leq g$ sur $[a ; b]$ avec $a \leq b$, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.