# Calcul intégral

Fiche tableaux : les propriétés à connaître
(Spécialité maths Terminale)

## Intégrale et primitive

| Situation | Résultat |
|---|---|
| $f$ continue et positive sur $[a\,;b]$ | $\int_a^b f(x)\,dx =$ aire sous $\mathcal{C}_f$ (en u.a.) |
| $f$ continue, $F$ primitive | $\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b)-F(a)$ |
| $f$ continue sur $I$, $a \in I$ | $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ : primitive de $f$ nulle en $a$ |
| bornes égales | $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ |
| bornes échangées | $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ |

Exemple : $\int_0^1 5x^4\,dx = \Big[x^5\Big]_0^1 = 1$.

## Propriétés de l'intégrale

| Propriété | Énoncé |
|---|---|
| Linéarité | $\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$ |
| Chasles | $\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$ |
| Positivité ($a \leqslant b$) | $f \geqslant 0$ donne $\int_a^b f \geqslant 0$ |
| Inégalités ($a \leqslant b$) | $f \leqslant g$ donne $\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$ |
| Encadrement ($a \leqslant b$) | $m \leqslant f \leqslant M$ donne $m(b-a) \leqslant \int_a^b f \leqslant M(b-a)$ |

Exemple : $\int_0^4 x\,dx = \int_0^1 x\,dx + \int_1^4 x\,dx = \dfrac{1}{2} + \dfrac{15}{2} = 8$.

## Intégrale et aire

| Situation ($a \leqslant b$) | Aire du domaine |
|---|---|
| $f \geqslant 0$ sur $[a\,;b]$ | $\mathcal{A} = \int_a^b f(x)\,dx$ |
| $f \leqslant 0$ sur $[a\,;b]$ | $\mathcal{A} = -\int_a^b f(x)\,dx$ |
| $f$ change de signe en $c$ | $\mathcal{A}$ = somme des aires de chaque morceau (Chasles en $c$) |
| $f \geqslant g$ sur $[a\,;b]$ | $\mathcal{A} = \int_a^b \big(f(x)-g(x)\big)\,dx$ |
| unités $u_x$ cm et $u_y$ cm | 1 u.a. $= u_x \times u_y$ cm² |

Exemple : $\int_0^1 (x-1)\,dx = -\dfrac{1}{2}$ ; la fonction est négative, l'aire vaut $\dfrac{1}{2}$ u.a.

## Valeur moyenne

| | **Valeur moyenne de $f$ sur $[a\,;b]$** |
|---|---|
| Définition ($a<b$) | $\mu=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ |
| Encadrement | $m\leqslant f\leqslant M$ donne $m\leqslant\mu\leqslant M$ |
| Interprétation ($f\geqslant 0$) | le rectangle de hauteur $\mu$ a la même aire que le domaine sous $\mathcal{C}_f$ |

Exemple : la valeur moyenne de $x\mapsto 6x$ sur $[0\,;1]$ est $\Big[3x^2\Big]_0^1=3$.

## Intégration par parties

$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx=\Big[u(x)v(x)\Big]_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)\,dx$ ($u'$, $v'$ continues).

| **Produit** | $u$ **(on dérive)** | $v'$ **(on primitive)** |
|---|---|---|
| polynôme $\times\,e^{ax}$ | le polynôme | $e^{ax}$ |
| polynôme $\times$ sin ou cos | le polynôme | sin ou cos |
| $x^n\times\ln x$ | $\ln x$ | $x^n$ |
| $(\ln x)^n$ seul | $(\ln x)^n$ | $1$ |

Exemple : $\int_1^2\ln x\,dx=\Big[x\ln x\Big]_1^2-\int_1^2 1\,dx=2\ln 2-1$.

## Méthode des rectangles

| $f$ **sur** $[a\,;b]$ | $s_n$ **(à gauche)** | $S_n$ **(à droite)** |
|---|---|---|
| croissante | valeur par défaut | valeur par excès |
| décroissante | valeur par excès | valeur par défaut |

$h=\dfrac{b-a}{n}$, $x_k=a+kh$ ; écart $|S_n-s_n|=h\,|f(b)-f(a)|$. Exemple : $f$ croissante sur $[0\,;3]$ avec $f(0)=1$ et $f(3)=7$ ; pour $n=30$, l'écart vaut $0{,}1\times 6=0{,}6$.

*Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).*