

Devoir surveillé – Intégration

Primitive, intégrale de Riemann et calcul d'aires — programme de Terminale Spécialité Maths

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Nom : _____

Date : _____

Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Primitives

(4 pts)

- a) a) Déterminer une primitive de $f(x) = 6x^2 - 4x + 3$ sur $\mathbb{R}$.
b) b) Déterminer une primitive de $g(x) = e^{5x}$ sur $\mathbb{R}$.
- c) c) Déterminer une primitive de $h(x) = \frac{3x^2}{x^3 + 2}$ sur $[0; +\infty[$.
d) d) Déterminer une primitive de $k(x) = (2x - 3)e^{x^2 - 3x}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 – Calculs d'intégrales

(4 pts)

- a) a) Calculer $\int_1^2 (4x^3 - 2x) dx$.
b) b) Calculer $\int_0^2 e^{x/2} dx$.
c) c) Calculer $\int_2^4 \left(\frac{1}{x} + 1\right) dx$; simplifier le résultat.
d) d) Un élève écrit : « $\int_{-2}^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^1 = \frac{1}{3} - \frac{8}{3} = -\frac{7}{3}$ ». Expliquer les deux raisons pour lesquelles ce résultat est faux, puis donner la valeur correcte.

Exercice 3 – Aire et valeur moyenne

(4 pts)

- a) Soit $f(x) = -x^2 + 6x - 5$, de courbe $\mathcal{C}$ dans un repère orthogonal d'unités 3 cm en abscisse et 2 cm en ordonnée.
a) Justifier que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [1; 5]$.
b) b) Calculer $\int_1^5 f(x) dx$.
c) c) En déduire, en cm^2 , l'aire du domaine délimité par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 5$.
d) d) Calculer la valeur moyenne de f sur $[1; 5]$.

Exercice 4 – Intégration par parties*(4 pts)*

- a) a) Calculer $\int_0^2 (x-1)e^x dx$.
- b) b) Calculer $\int_1^4 \ln x dx$; exprimer le résultat avec $\ln 2$.
- c) c) Calculer $\int_0^{\pi/2} x \cos x dx$.
- d) d) Pour l'intégrale c), un élève choisit de dériver $\cos x$ et d'intégrer x . Expliquer pourquoi ce choix ne permet pas de conclure.

Exercice 5 – Suite d'intégrales*(4 pts)*

- a) Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.
- a) Calculer u_0 .
- b) b) Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n + u_{n+1} = \frac{1}{n+1}$. En déduire u_1 .
- c) c) Montrer que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$, et en déduire la limite de (u_n) .
- d) d) Montrer que la suite (u_n) est décroissante, puis que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} \leq \frac{1}{2(n+1)}$.

Bon courage !