

Corrigé et barème – Intégration

Primitive, intégrale de Riemann et calcul d'aires — programme de Terminale Spécialité Maths

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Exercice 1 – Primitives

(4 pts)

- a) $F(x) = 2x^3 - 2x^2 + 3x$ (vérification : $F'(x) = 6x^2 - 4x + 3$). (1)
 b) $G(x) = \frac{1}{5}e^{5x}$, car $(\frac{1}{5}e^{5x})' = e^{5x}$. (1)
 c) Forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^3 + 2 > 0$ sur $[0; +\infty[$: $H(x) = \ln(x^3 + 2)$. (1)
 d) Forme $u'e^u$ avec $u(x) = x^2 - 3x$, $u'(x) = 2x - 3$: $K(x) = e^{x^2-3x}$. (1)

Astuce — Chaque primitive se contrôle en dix secondes en la dérivant : c'est le moyen le plus sûr de ne pas perdre de points sur un coefficient.

Exercice 2 – Calculs d'intégrales

(4 pts)

- a) $[x^4 - x^2]_1^2 = (16 - 4) - (1 - 1) = 12$. (1)
 b) Primitive de $e^{x/2}$: $2e^{x/2}$. $[2e^{x/2}]_0^2 = 2e - 2$. (1)
 c) $[\ln x + x]_2^4 = (\ln 4 + 4) - (\ln 2 + 2) = \ln 4 - \ln 2 + 2 = \ln 2 + 2$. (1)
 d) Erreur de calcul : $F(-2) = \frac{(-2)^3}{3} = -\frac{8}{3}$, donc $F(1) - F(-2) = \frac{1}{3} + \frac{8}{3} = 3$. Erreur de cohérence : $x^2 \geq 0$, l'intégrale d'une fonction positive (bornes dans le bon sens) ne peut pas être négative. Valeur correcte : 3. (1)

Erreur fréquente — Le signe de $F(a)$ quand a est négatif et une puissance impaire : écrire $F(a)$ entre parenthèses avant de soustraire évite l'erreur.

Exercice 3 – Aire et valeur moyenne

(4 pts)

- a) $f(x) = -(x-1)(x-5)$ (racines 1 et 5, coefficient dominant négatif). Sur $[1; 5]$, $x-1 \geq 0$ et $x-5 \leq 0$, donc $(x-1)(x-5) \leq 0$ et $f(x) \geq 0$. (1)
 b) $F(x) = -\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x$. $F(5) = -\frac{125}{3} + 75 - 25 = \frac{25}{3}$; $F(1) = -\frac{1}{3} + 3 - 5 = -\frac{7}{3}$. $\int_1^5 f = \frac{25}{3} + \frac{7}{3} = \frac{32}{3}$. (1)
 c) f continue positive : aire = $\frac{32}{3}$ u.a. Une u.a. = $3 \times 2 = 6 \text{ cm}^2$, donc aire = $\frac{32}{3} \times 6 = 64 \text{ cm}^2$. (1)
 d) $\mu = \frac{1}{5-1} \times \frac{32}{3} = \frac{8}{3} \approx 2,67$. (1)

Repère — L'intégrale donne des unités d'aire ; la conversion en cm^2 multiplie par le produit des deux unités du repère, pas par une seule.

Exercice 4 – Intégration par parties

(4 pts)

- a) $v = x - 1$, $u' = e^x$, $v' = 1$, $u = e^x$. $[(x-1)e^x]_0^2 - \int_0^2 e^x dx = (e^2 + 1) - (e^2 - 1) = 2$. (1)
 b) $v = \ln x$, $u' = 1$, $v' = \frac{1}{x}$, $u = x$. $[x \ln x]_1^4 - \int_1^4 1 dx = 4 \ln 4 - 3 = 8 \ln 2 - 3$. (1)
 c) $v = x$, $u' = \cos x$, $v' = 1$, $u = \sin x$. $[x \sin x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x dx = \frac{\pi}{2} - [-\cos x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1$. (1)
 d) Avec $v = \cos x$ et $u' = x$, on obtient $u = \frac{x^2}{2}$ et $v' = -\sin x$: la nouvelle intégrale est $\int_0^{\pi/2} \frac{x^2}{2} \sin x dx$, dont le degré du polynôme a augmenté. Elle est plus compliquée que l'intégrale de départ : on tourne en rond. Il faut dériver le polynôme pour faire baisser son degré. (1)

Le point clé — En IPP, on dérive ce qui se simplifie (polynôme, $\ln$) et on intègre ce qui se conserve (exponentielle, cosinus, sinus).

Exercice 5 – Suite d'intégrales*(4 pts)*

- a) $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2$ (forme $\frac{u'}{u}$, $1+x > 0$). (1)
- b) Linéarité : $u_n + u_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1+x} dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$. Avec $n=0$: $u_1 = 1 - u_0 = 1 - \ln 2$. (1)
- c) Sur $[0; 1]$, $x^n \geq 0$ et $1+x \geq 1$, donc $0 \leq \frac{x^n}{1+x} \leq x^n$; par positivité et ordre, $0 \leq u_n \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$. Gendarmes : $\lim u_n = 0$. (1)
- d) Sur $[0; 1]$, $x^{n+1} \leq x^n$ donc $\frac{x^{n+1}}{1+x} \leq \frac{x^n}{1+x}$ et $u_{n+1} \leq u_n$: décroissante. Alors $2u_{n+1} \leq u_n + u_{n+1} = \frac{1}{n+1}$, d'où $u_{n+1} \leq \frac{1}{2(n+1)}$. (1)

Attention — Une inégalité entre fonctions ne s'intègre que si les bornes sont dans le bon sens ; chaque « montrer que » doit citer la propriété (positivité, ordre, linéarité) utilisée.