Vecteurs, droites et plans de l'espace

Fiche méthode

(Spécialité maths Terminale · Géométrie dans l'espace)

La démarche pour une question de géométrie dans l'espace

1. Je traduis la question en égalité de vecteurs : alignés ($\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB}$), coplanaires ($\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$), point sur une droite ou un plan (paramètres).

2. Je calcule les coordonnées utiles : « extrémité moins origine », milieu, lecture dans le repère d'un cube par un chemin d'arêtes.

3. Je résous le système : deux équations pour trouver les inconnues, la troisième pour décider.

4. Je conclus en citant la caractérisation : « les vecteurs sont colinéaires, donc… », « le système n'a pas de solution, donc… ».

Le réflexe — la troisième équation n'est jamais facultative : c'est elle qui décide si le point appartient à la droite, si les vecteurs sont coplanaires, si les droites se coupent.

Cas 1 · Vecteurs, coordonnées et alignement

Réflexe — je calcule les vecteurs, je cherche k sur une coordonnée non nulle, je le vérifie sur les deux autres.

Exemple. Questions types : « Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et du milieu », « Les points A, B, C sont-ils alignés ? ». Exemple : $A(0\,;2\,;-1)$, $B(1\,;4\,;0)$, $C(3\,;8\,;2)$.

$\overrightarrow{AB}\,(1\,;2\,;1)$ et $\overrightarrow{AC}\,(3\,;6\,;3)$.

$3 = 3\times 1$, $6 = 3\times 2$, $3 = 3\times 1$: $\overrightarrow{AC} = 3\,\overrightarrow{AB}$.

Les vecteurs sont colinéaires, donc A, B, C sont alignés.

Attention — les trois coordonnées doivent donner le même k ; deux ne suffisent pas.

Cas 2 · Coplanaires ou base ?

Réflexe — deux vecteurs non colinéaires, puis w = au + bv : deux équations pour a et b, la troisième pour conclure.

Exemple. Questions types : « Montrer que $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires », « Montrer que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base ». Exemple : $\vec{u}\,(1\,;2\,;1)$, $\vec{v}\,(0\,;1\,;-2)$, $\vec{w}\,(2\,;3\,;4)$.

L'abscisse de $\vec{v}$ est nulle, pas celle de $\vec{u}$: $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$: les abscisses donnent $a = 2$, les ordonnées $4 + b = 3$, soit $b = -1$.

Cotes : $2\times 1 + (-1)\times(-2) = 4$, vérifiée. $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$: les vecteurs sont coplanaires (ce n'est pas une base).

Attention — deux à deux non colinéaires ne suffit pas pour une base.

Cas 3 · Représentation paramétrique d'une droite

Réflexe — un point (les constantes) + un vecteur directeur (les coefficients de t) ; pour tester un point, un même t dans les trois équations.

Exemple. Questions types : « Déterminer une représentation paramétrique de (AB) », « Le point C appartient-il à (AB) ? ». Exemple : $A(1\,;-1\,;2)$, $B(3\,;0\,;-2)$, $C(5\,;1\,;-6)$.

$\overrightarrow{AB}\,(2\,;1\,;-4)$: (AB) a pour représentation $x = 1 + 2t$, $y = -1 + t$, $z = 2 - 4t$ $(t \in \mathbb{R})$.

Pour C : $5 = 1 + 2t$ donne $t = 2$; alors $y = 1$ et $z = 2 - 8 = -6$.

Les trois équations sont vérifiées par $t = 2$: $C \in (AB)$.

Attention — un point vérifié sur deux coordonnées seulement n'est pas sur la droite.

Cas 4 · Point d'un plan, quatre points coplanaires

Réflexe — AD = aAB + bAC (ou AM = λu + μv) : deux équations pour les paramètres, la troisième pour décider.

Exemple. Questions types : « Le point M appartient-il au plan P ? », « Les points A, B, C, D sont-ils coplanaires ? ». Exemple : $P : x = \lambda + \mu$, $y = 1 + 2\mu$, $z = 1 + 3\lambda$ et $M(2\,;3\,;4)$.

Ordonnée : $1 + 2\mu = 3$, donc $\mu = 1$. Cote : $1 + 3\lambda = 4$, donc $\lambda = 1$.

Abscisse : $\lambda + \mu = 2$, vérifiée.

Le couple $(1\,;1)$ vérifie les trois équations : $M \in P$.

Attention — λ et μ sont deux paramètres distincts : ne pas les confondre avec le t d'une droite.

Cas 5 · Position relative de deux droites

Réflexe — vecteurs directeurs colinéaires ? Oui : un point commun ou non. Non : système en t et s, une solution (sécantes) ou aucune (non coplanaires).

Exemple. Questions types : « Étudier la position relative de d et d' », « Montrer que d et d' sont non coplanaires ». Exemple : $d : x = 1 + t$, $y = 2 + t$, $z = 4 - t$ et $d' : x = 2s$, $y = 1 + 3s$, $z = 3 + s$.

Vecteurs directeurs $(1\,;1\,;-1)$ et $(2\,;3\,;1)$: $\dfrac{2}{1} \neq \dfrac{3}{1}$, non colinéaires.

Abscisses et ordonnées : $1 + t = 2s$ et $2 + t = 1 + 3s$; en soustrayant, $1 = 1 + s$, donc $s = 0$ et $t = -1$.

Cotes : $4 - (-1) = 5$ sur d, $3 + 0 = 3$ sur d' : $5 \neq 3$. Pas de point commun, pas parallèles : d et d' sont non coplanaires.

Attention — même paramètre t pour les deux droites : faute classique, on nomme t et s.

Les pièges

- Dans l'espace, deux droites non parallèles ne sont pas forcément sécantes : elles peuvent être non coplanaires.
- Deux paramètres différents (t et s) pour deux droites : jamais le même nom.
- La troisième équation décide : deux équations vérifiées ne prouvent rien.
- Deux à deux non colinéaires ne veut pas dire base : trois vecteurs d'un même plan le sont souvent.
- Une représentation paramétrique n'est pas unique : on compare vecteurs directeurs et points, pas les écritures.
- Un vecteur directeur est non nul, et deux vecteurs colinéaires ne dirigent pas un plan.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).