

Devoir surveillé – Géométrie dans l'espace

Vecteurs, droites et plans de l'espace, produit scalaire, orthogonalité et distances, représentations paramétriques et équations cartésiennes (Tle spé, BO 2019)

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Vecteurs, alignement et coplanarité (4 pts)

- a) a) On donne $A(1; 2; -1)$, $B(4; 0; 3)$ et $C(-2; 6; -5)$. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$.
- b) b) Montrer que les points A , B et C ne sont pas alignés.
- c) c) Le point $D(7; -2; 7)$ appartient-il à la droite (AB) ?
- d) d) Le vecteur $\vec{w}(0; 2; 0)$ est-il coplanaire avec $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$?

Exercice 2 – Droite et plan : intersection (4 pts)

- a) a) Soit $\mathcal{P} : 3x - y + 2z - 5 = 0$. Donner un vecteur normal de $\mathcal{P}$ et dire si $A(2; 1; -3)$ appartient à $\mathcal{P}$.
- b) b) Donner une représentation paramétrique de la droite d passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(1; 2; -4)$.
- c) c) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de d et de $\mathcal{P}$.
- d) d) Étudier la position relative de $\mathcal{P}$ et de la droite d' passant par $B(1; 1; 1)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(2; 0; -3)$.

Exercice 3 – Distance d'un point à un plan (4 pts)

- a) a) Soit $\mathcal{Q} : x - 2y + 2z + 3 = 0$ et $M(4; -1; 2)$. Donner un vecteur normal de $\mathcal{Q}$ et calculer sa norme.
- b) b) Calculer la distance de M à $\mathcal{Q}$: valeur exacte, puis arrondie au centième.
- c) c) Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de M sur $\mathcal{Q}$.
- d) d) La sphère de centre M et de rayon 4 a-t-elle des points communs avec $\mathcal{Q}$?

Exercice 4 – Sphère, plan tangent et plan sécant (4 pts)

- a) a) Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}$ d'équation $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 8z + 13 = 0$ est une sphère, et préciser son centre Ω et son rayon.
- b) b) Le point $T(0; 1; 2)$ appartient-il à $\mathcal{S}$?
- c) c) Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à $\mathcal{S}$ en T .
- d) d) Le plan d'équation $z = 7$ coupe-t-il $\mathcal{S}$? Justifier.

Exercice 5 – Tétraèdre : plan, distance, volume et aire*(4 pts)*

- a) a) On donne $O(0; 0; 0)$, $A(2; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$ et $C(0; 0; 6)$. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) .
- b) b) Calculer la distance de O au plan (ABC) , valeur exacte puis arrondie au centième.
- c) c) Calculer le volume du tétraèdre $OABC$, puis en déduire l'aire exacte du triangle ABC .
- d) d) Un élève affirme : « les arêtes $[OA]$, $[OB]$ et $[OC]$ étant deux à deux perpendiculaires, le triangle ABC est rectangle en A ». Expliquer son erreur.

Bon courage !