

Corrigé et barème – Géométrie dans l'espace

Vecteurs, droites et plans de l'espace, produit scalaire, orthogonalité et distances, représentations paramétriques et équations cartésiennes (Tle spé, BO 2019)

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Exercice 1 – Vecteurs, alignement et coplanarité

(4 pts)

- $\overrightarrow{AB}(3; -2; 4)$ et $\overrightarrow{AC}(-3; 4; -4)$. (1)
- Si $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, la première coordonnée impose $k = -1$, et la deuxième donnerait $2 \neq 4$. Les vecteurs ne sont pas colinéaires : les points ne sont pas alignés. (1)
- $\overrightarrow{AD}(6; -4; 8) = 2\overrightarrow{AB}$: les vecteurs sont colinéaires, donc D appartient à (AB) . (1)
- On cherche a, b tels que $a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC} = \vec{w}$: $3a - 3b = 0$ donne $a = b$, puis $-2a + 4b = 2a = 2$ donc $a = b = 1$, et la troisième équation $4a - 4b = 0$ est vérifiée. Oui, $\vec{w} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$: les trois vecteurs sont coplanaires. (1)

Erreur fréquente — Pour conclure à la non-colinéarité, il suffit d'exhiber deux coordonnées incompatibles : inutile de « résoudre » les trois.

Exercice 2 – Droite et plan : intersection

(4 pts)

- $\vec{n}(3; -1; 2)$ est normal à $\mathcal{P}$. Pour $A : 6 - 1 - 6 - 5 = -6 \neq 0$, donc $A \notin \mathcal{P}$. (1)
- $x = 2 + t, y = 1 + 2t, z = -3 - 4t$, avec $t \in \mathbb{R}$. (1)
- $\vec{u} \cdot \vec{n} = 3 - 2 - 8 = -7 \neq 0$: la droite est sécante au plan. En substituant : $3(2 + t) - (1 + 2t) + 2(-3 - 4t) - 5 = -7t - 6 = 0$, donc $t = -\frac{6}{7}$ et le point d'intersection est $I(\frac{8}{7}; -\frac{5}{7}; \frac{3}{7})$. (1)
- $\vec{v} \cdot \vec{n} = 6 - 0 - 6 = 0$: d' est parallèle à $\mathcal{P}$. Or $3 - 1 + 2 - 5 = -1 \neq 0$, donc $B \notin \mathcal{P}$: la droite d' est strictement parallèle au plan. (1)

Le point clé — Produit scalaire nul entre le vecteur directeur et la normale : parallélisme ; il reste ensuite à tester un point pour trancher entre « incluse » et « strictement parallèle ».

Exercice 3 – Distance d'un point à un plan

(4 pts)

- $\vec{n}(1; -2; 2)$, de norme $\sqrt{1 + 4 + 4} = 3$. (1)
- $d(M, \mathcal{Q}) = \frac{|4 + 2 + 4 + 3|}{3} = \frac{13}{3} \approx 4,33$. (1)
- La droite $x = 4 + t, y = -1 - 2t, z = 2 + 2t$ coupe $\mathcal{Q}$ pour $13 + 9t = 0$, soit $t = -\frac{13}{9}$: $H(\frac{23}{9}; \frac{17}{9}; -\frac{8}{9})$, et l'on retrouve $MH = \frac{13}{9} \times 3 = \frac{13}{3}$. (1)
- $\frac{13}{3} \approx 4,33 > 4$: la distance du centre au plan dépasse le rayon, la sphère et le plan n'ont aucun point commun. (1)

Attention — Le dénominateur de la formule est la norme du vecteur normal, pas la somme de ses coordonnées.

Exercice 4 – Sphère, plan tangent et plan sécant

(4 pts)

- a) $x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4$, $y^2 - 2y = (y - 1)^2 - 1$, $z^2 - 8z = (z - 4)^2 - 16$. L'équation devient $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 4)^2 = 8$: sphère de centre $\Omega(-2; 1; 4)$ et de rayon $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. (1)
- b) $(0 + 2)^2 + (1 - 1)^2 + (2 - 4)^2 = 4 + 0 + 4 = 8$: oui, T appartient à $\mathcal{S}$. (1)
- c) Le plan tangent en T est le plan passant par T et de vecteur normal $\overrightarrow{\Omega T}(2; 0; -2)$, soit $(1; 0; -1)$: $x - z + d = 0$ avec $0 - 2 + d = 0$, d'où $x - z + 2 = 0$. (1)
- d) La distance de Ω au plan $z = 7$ vaut $|4 - 7| = 3$, et $3 > 2\sqrt{2} \approx 2,83$: le plan ne coupe pas la sphère. (1)

Repère — Comparer 3 et $2\sqrt{2}$ exige un calcul : $3^2 = 9 > 8$, la valeur approchée seule ne prouve rien.

Exercice 5 – Tétraèdre : plan, distance, volume et aire

(4 pts)

- a) $\overrightarrow{AB}(-2; 3; 0)$ et $\overrightarrow{AC}(-2; 0; 6)$ ne sont pas colinéaires. Un vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$ vérifie $-2a + 3b = 0$ et $-2a + 6c = 0$: avec $a = 3$, $b = 2$ et $c = 1$. D'où $3x + 2y + z + d = 0$ et, avec $A : d = -6$. Une équation est $3x + 2y + z - 6 = 0$. (1)
- b) $d(O, (ABC)) = \frac{|-6|}{\sqrt{9+4+1}} = \frac{6}{\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{14}}{7} \approx 1,60$. (1)
- c) Le trièdre en O est trirectangle : $V = \frac{1}{3} \times \frac{2 \times 3}{2} \times 6 = 6$. En prenant ABC comme base : $6 = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABC} \times \frac{6}{\sqrt{14}}$, donc $\mathcal{A}_{ABC} = 3\sqrt{14} \approx 11,22$. (1)
- d) L'orthogonalité des arêtes issues de O ne dit rien des angles du triangle ABC : ici $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 + 0 + 0 = 4 \neq 0$, donc l'angle en A n'est pas droit. On vérifie de même qu'aucun angle de ABC n'est droit. (1)

À retenir — Un angle droit se prouve par un produit scalaire nul, jamais par la forme de la figure.