

# Fonction logarithme népérien

Le logarithme népérien est la réciproque de l'exponentielle : il sert à résoudre les équations où l'inconnue est en exposant, à étudier des fonctions et à trouver des seuils de suites géométriques.

## 1 Définitions

- **ln k** ( $k > 0$ ) : l'unique solution de  $e^x = k$ . La fonction  $x \mapsto \ln x$  est définie sur  $]0; +\infty[$ .
- **Valeurs clés** :  $\ln 1 = 0$ ,  $\ln e = 1$ ,  $\ln x < 0$  sur  $]0; 1[$ ,  $\ln x > 0$  sur  $]1; +\infty[$ .
- **Réciprocité** :  $e^{\ln x} = x$  ( $x > 0$ ) et  $\ln(e^x) = x$  ( $x$  réel) ; courbes symétriques par rapport à  $y = x$ .

## 2 Formules ( $a > 0$ , $b > 0$ , $n$ entier)

- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$  (démonstration exigible).
- $\ln \frac{1}{b} = -\ln b$  ;  $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$ .
- $\ln(a^n) = n \ln a$  ;  $\ln \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \ln a$ .
- $\ln a = \ln b \iff a = b$  ;  $\ln a < \ln b \iff a < b$ .
- $e^x = k \iff x = \ln k$  ( $k > 0$ ) ;  $\ln x = k \iff x = e^k$ .

## 3 Dérivées et limites

- $\ln'(x) = \frac{1}{x}$  :  $\ln$  est strictement croissante et concave sur  $]0; +\infty[$ .
- $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$  si  $u$  est dérivable et  $u > 0$ .
- Tangentes :  $y = x - 1$  en  $1$ ,  $y = \frac{x}{e}$  en  $e$  ;  $\ln x \leq x - 1$ .
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ .
- Croissances comparées :  $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$  en  $+\infty$  ;  $x \ln x \rightarrow 0$  en  $0^+$  ;  $\frac{\ln x}{x^n} \rightarrow 0$  en  $+\infty$ .

## 4 Méthodes

1. **Équation avec ln** : ensemble de définition (arguments  $> 0$ ), regroupement en un seul  $\ln$  par membre,  $\ln a = \ln b \iff a = b$ , tri des solutions.
2. **Seuil  $q^n$**  : appliquer  $\ln$ , écrire  $n \ln q$ , diviser par  $\ln q$  (sens inversé si  $0 < q < 1$ ), prendre le premier entier.
3. **Étude de fonction** : dériver, réduire  $f'$  au même dénominateur, signe du numérateur, limites par factorisation du terme dominant.
4. **Limite indéterminée** : factoriser par la plus grande puissance de  $x$  pour faire apparaître  $\frac{\ln x}{x^n}$ .

## 5 Pièges

- $\ln(x^2) = 2 \ln|x|$  : écrire  $2 \ln x$  fait perdre les solutions négatives.
- $\ln(a+b) \neq \ln a + \ln b$  ;  $\ln a \times \ln b \neq \ln(ab)$ .
- $(\ln(3x+2))' = \frac{3}{3x+2}$ , pas  $\frac{1}{3x+2}$ .
- $\frac{\ln x}{x} \rightarrow -\infty$  en  $0^+$  : ce n'est pas une forme indéterminée.
- Diviser par  $\ln q < 0$  inverse l'inégalité.

### L'ESSENTIEL

- $\ln$  est la fonction réciproque de  $\exp$  :  $e^{\ln x} = x$  pour  $x > 0$  et  $\ln(e^x) = x$  pour tout réel  $x$ .
- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ ,  $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$ ,  $\ln(a^n) = n \ln a$  : le logarithme transforme les produits en sommes.
- La dérivée de  $\ln x$  est  $1/x$ , celle de  $\ln u$  est  $u'/u$  ( $u > 0$ ) :  $\ln$  est strictement croissante et concave.

- $\ln x$  tend vers  $-\infty$  en  $0^+$  et vers  $+\infty$  en  $+\infty$ , mais  $(\ln x)/x$  tend vers  $0$  : le logarithme croît moins vite que toute puissance.
- Pour résoudre  $q^n \leq a$ , on applique  $\ln$  puis on divise par  $\ln q$ , en inversant l'inégalité si  $0 < q < 1$ .