Fonction logarithme népérien

Fiche tableaux : ce qu'il faut connaître
(Spécialité maths Terminale)

Définition et valeurs

Résultat	Condition
$\ln a = b \iff a = e^b$	$a > 0$, b réel
$e^{\ln x} = x$	$x > 0$
$\ln(e^x) = x$	x réel
$\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$	—
courbes de ln et exp symétriques par rapport à $y = x$	repère orthonormé

Exemples : $\ln(e^{0{,}3}) = 0{,}3$; $e^{\ln 9} = 9$; $\ln x = 4 \iff x = e^4$.

Propriétés algébriques ($a > 0$, $b > 0$, n entier relatif)

Produit	Inverse	Quotient	Puissance	Racine
$\ln(ab) = \ln a + \ln b$	$\ln \dfrac{1}{b} = -\ln b$	$\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$	$\ln(a^n) = n \ln a$	$\ln \sqrt{a} = \dfrac{1}{2} \ln a$

Exemples : $\ln 40 = 3 \ln 2 + \ln 5$; $\ln \dfrac{e^3}{2} = 3 - \ln 2$. Aucune formule pour $\ln(a + b)$.

Équations et inéquations

Écriture	Équivaut à	Condition
$\ln a = \ln b$	$a = b$	$a > 0$, $b > 0$
$\ln a < \ln b$	$a < b$	$a > 0$, $b > 0$
$e^a < e^b$	$a < b$	a, b réels
$\ln x < k$	$0 < x < e^k$	k réel
$e^x < k$	$x < \ln k$	$k > 0$
$q^n < a$	$n > \dfrac{\ln a}{\ln q}$	$0 < q < 1$, $a > 0$ (sens changé)
$q^n > a$	$n > \dfrac{\ln a}{\ln q}$	$q > 1$, $a > 0$

Exemples : $\ln(x - 1) < 2 \iff 1 < x < 1 + e^2$; $0{,}95^n < 0{,}5 \iff n > \dfrac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}95} \approx 13{,}5$, soit $n \geqslant 14$.

Signe, variations, tangentes

x	0		1		e		$+\infty$
signe de $\ln x$	$\|\|$	$-$	0	$+$		$+$	
variations de ln	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Tangentes : $y = x - 1$ en 1, $y = \dfrac{x}{e}$ en e. Inégalité : $\ln x \leqslant x - 1$ pour tout $x > 0$. Exemple : $\ln 0{,}8 < 0 < \ln 1{,}2$.

Limites et croissances comparées

En 0^+	**En $+\infty$**
$\ln x \to -\infty$	$\ln x \to +\infty$
$x \ln x \to 0$	$\dfrac{\ln x}{x} \to 0$
$x^n \ln x \to 0$ $(n \geqslant 1)$	$\dfrac{\ln x}{x^n} \to 0$ $(n \geqslant 1)$
$\dfrac{\ln x}{x} \to -\infty$ (pas de FI)	$x - \ln x \to +\infty$

Exemples : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$; $\lim\limits_{x \to 0^+} (x^3 \ln x - 4) = -4$.

Dérivées

Fonction	**Dérivée**	**Où**
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$]0\,;+\infty[$
$\ln(ax+b)$	$\dfrac{a}{ax+b}$	là où $ax+b>0$
$\ln u$	$\dfrac{u'}{u}$	là où $u>0$

Exemples : $\big(3\ln x - x\big)' = \dfrac{3}{x} - 1$; $\big(\ln(x^2+7)\big)' = \dfrac{2x}{x^2+7}$ sur $\mathbb{R}$.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).