

Devoir surveillé – Fonction logarithme népérien

Définition, propriétés algébriques et étude complète de $\ln$ — Analyse (Terminale spécialité)

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Nom : _____

Date : _____

Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Calculs avec le logarithme

(4 pts)

- a) a) Écrire $\ln 48$ en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$.
 b) b) Simplifier $\ln(e^5) - \ln \frac{1}{e}$.
 c) c) Simplifier $e^{-\ln 4}$.
 d) d) Simplifier $\ln \sqrt{e^3}$.

Exercice 2 – Équations et inéquations

(4 pts)

- a) a) Résoudre $e^{2x+1} = 9$ (valeur exacte puis arrondie au centième).
 b) b) Résoudre $\ln(5x - 3) = \ln(2x + 9)$ après avoir précisé l'ensemble de définition.
 c) c) Résoudre $(\ln x)^2 - \ln x - 6 = 0$.
 d) d) Déterminer le plus petit entier n tel que $0,6^n < 0,05$.

Exercice 3 – Étude d'une fonction

(4 pts)

- a) Soit f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x \ln x - 2x$.
 a) Montrer que $f'(x) = \ln x - 1$.
 b) b) Dresser le tableau de variations de f (valeur exacte de l'extremum).
 c) c) Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.
 d) d) Déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$, en justifiant.

Exercice 4 – Placement à intérêts composés

(4 pts)

- a) Un capital de 3 000 € est placé à 4 % par an, intérêts capitalisés. On note C_n le capital, en euros, après n années.
 a) Exprimer C_n en fonction de n et calculer C_5 au centime près.
 b) b) Au bout de combien d'années le capital dépasse-t-il 5 000 € ? Justifier par un calcul utilisant $\ln$.
 c) c) À quel taux annuel t , arrondi à 0,01 %, faudrait-il placer ce capital pour qu'il double en 10 ans ?
 d) d) Pour la question b), un élève écrit : « $C_n \geq 5000 \iff n = \frac{\ln(5000 - 3000)}{\ln 1,04} \approx 194$ ». Expliquer ses erreurs.

Exercice 5 – Équation $f(x) = 0$ et théorème des valeurs intermédiaires

(4 pts)

- a) Soit h définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = 2 \ln x - x + 1$.
 a) Déterminer les limites de h en 0^+ et en $+\infty$.
 b) b) Étudier les variations de h et donner la valeur exacte de son maximum.
 c) c) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet exactement deux solutions, dont l'une est $x = 1$.
 d) d) Donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de la seconde solution β .

Bon courage !