

Corrigé et barème – Fonction logarithme népérien

Définition, propriétés algébriques et étude complète de $\ln$ — Analyse (Terminale spécialité)

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Exercice 1 – Calculs avec le logarithme

(4 pts)

- a) $48 = 2^4 \times 3$ donc $\ln 48 = 4 \ln 2 + \ln 3$. (1)
- b) $\ln(e^5) = 5$ et $\ln \frac{1}{e} = -1$: $5 - (-1) = 6$. (1)
- c) $e^{-\ln 4} = \frac{1}{e^{\ln 4}} = \frac{1}{4}$. (1)
- d) $\sqrt{e^3} = e^{3/2}$ donc $\ln \sqrt{e^3} = \frac{3}{2}$. (1)

Repère — Décomposer l'argument en produit de facteurs premiers ou en puissance de e avant d'appliquer les formules.

Exercice 2 – Équations et inéquations

(4 pts)

- a) $9 > 0$: $2x + 1 = \ln 9 = 2 \ln 3$, d'où $x = \frac{2 \ln 3 - 1}{2} \approx 0,60$. (1)
- b) Définition : $5x - 3 > 0$ et $2x + 9 > 0$, soit $x > \frac{3}{5}$. Alors $5x - 3 = 2x + 9 \iff 3x = 12 \iff x = 4$, qui vérifie $x > \frac{3}{5}$: $\mathcal{S} = \{4\}$. (1)
- c) Sur $]0; +\infty[$, posons $X = \ln x$: $X^2 - X - 6 = 0$, $\Delta = 25$, $X = 3$ ou $X = -2$. Donc $x = e^3$ ou $x = e^{-2}$. (1)
- d) $n \ln 0,6 < \ln 0,05 \iff n > \frac{\ln 0,05}{\ln 0,6} \approx 5,87$ car $\ln 0,6 < 0$; le plus petit entier est $n = 6$. (1)

Erreur fréquente — Diviser par $\ln q$ avec $0 < q < 1$ sans inverser le sens de l'inégalité donne un résultat absurde ($n \leq 5,87$).

Exercice 3 – Étude d'une fonction

(4 pts)

- a) $(x \ln x)' = \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$, donc $f'(x) = \ln x + 1 - 2 = \ln x - 1$. (1)
- b) $f'(x) > 0 \iff \ln x > 1 \iff x > e$: f décroît sur $]0; e]$, croît sur $[e; +\infty[$; minimum $f(e) = e \times 1 - 2e = -e$. (1)
- c) $f(1) = 0 - 2 = -2$ et $f'(1) = 0 - 1 = -1$: tangente $y = -1(x - 1) - 2$, soit $y = -x - 1$. (1)
- d) En 0^+ : $x \ln x \rightarrow 0$ (croissances comparées) et $-2x \rightarrow 0$, donc $f(x) \rightarrow 0$. En $+\infty$: $f(x) = x(\ln x - 2)$ avec $x \rightarrow +\infty$ et $\ln x - 2 \rightarrow +\infty$, donc $f(x) \rightarrow +\infty$. (1)

Le point clé — En 0^+ , la limite de $x \ln x$ n'est pas « $0 \times (-\infty) = 0$ » par réflexe : c'est un résultat de croissances comparées à citer.

Exercice 4 – Placement à intérêts composés

(4 pts)

- a) (C_n) est géométrique de raison 1,04 : $C_n = 3000 \times 1,04^n$; $C_5 = 3000 \times 1,04^5 \approx 3\,649,96$ €. (1)
- b) $3000 \times 1,04^n \geq 5000 \iff 1,04^n \geq \frac{5}{3} \iff n \ln 1,04 \geq \ln \frac{5}{3} \iff n \geq \frac{\ln(5/3)}{\ln 1,04} \approx 13,02$ ($\ln 1,04 > 0$) : au bout de 14 ans. (1)
- c) $(1+t)^{10} = 2 \iff 10 \ln(1+t) = \ln 2 \iff 1+t = e^{\ln 2/10}$, donc $t = e^{\ln 2/10} - 1 \approx 0,0718$, soit environ 7,18 %. (1)
- d) Deux erreurs : il faut isoler $1,04^n$ en divisant par 3 000, ce qui donne $\ln \frac{5000}{3000}$ et non $\ln(5000 - 3000)$ (le logarithme d'une différence ne se simplifie pas) ; de plus, une inéquation donne une condition $n \geq \dots$, pas une égalité. (1)

Attention — On applique $\ln$ seulement après avoir isolé la puissance ; $\ln(a - b)$ n'a aucune formule.

Exercice 5 – Équation $f(x) = 0$ et théorème des valeurs intermédiaires (4 pts)

- a) En $0^+ : 2 \ln x \rightarrow -\infty$ et $-x + 1 \rightarrow 1$, donc $h(x) \rightarrow -\infty$. En $+\infty : h(x) = x \left(2 \frac{\ln x}{x} - 1 + \frac{1}{x} \right)$, la parenthèse tend vers -1 et $x \rightarrow +\infty : h(x) \rightarrow -\infty$. (1)
- b) $h'(x) = \frac{2}{x} - 1 = \frac{2-x}{x}$, du signe de $2 - x : h$ croît sur $]0 ; 2]$, décroît sur $[2 ; +\infty[$; maximum $h(2) = 2 \ln 2 - 1 \approx 0,39 > 0$. (1)
- c) $h(1) = 0 - 1 + 1 = 0 : 1$ est solution. Sur $]0 ; 2]$, h est continue et strictement croissante, donc 1 est l'unique solution. Sur $[2 ; +\infty[$, h est continue, strictement décroissante, de $h(2) > 0$ vers $-\infty$: unique solution $\beta > 2$ (corollaire du TVI). Au total, exactement deux solutions. (1)
- d) $h(3,5) = 2 \ln 3,5 - 2,5 \approx 0,006 > 0$ et $h(3,6) = 2 \ln 3,6 - 2,6 \approx -0,038 < 0$, donc $3,5 < \beta < 3,6$. (1)

Astuce — Tester les valeurs simples ($x = 1$, $x = e$) avant de chercher une solution à la calculatrice : $\ln 1 = 0$ fait souvent apparaître une racine évidente.