

Fonction exponentielle

La fonction exponentielle modélise tout ce qui croît ou décroît à vitesse proportionnelle à sa valeur : il faut savoir la manipuler algébriquement, la dériver sous la forme e^u , connaître ses limites et résoudre les équations qu'elle engendre.

1 Définitions

- **Fonction exponentielle** : unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. Notée $\exp$, avec $\exp(x) = e^x$.
- **Nombre e** : $e = \exp(1) \approx 2,718$.
- **Signe** : $e^x > 0$ pour tout réel x (y compris e^{-x}).

2 Formules

- $e^{a+b} = e^a e^b$; $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$; $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$; $(e^a)^n = e^{na}$.
- $(e^x)' = e^x$ et $(e^u)' = u'e^u$.
- $e^x \geq x + 1$ pour tout x (tangente en 0 : $y = x + 1$).
- $u_n = e^{an}$ est géométrique de raison e^a .

3 Variations et limites

- $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$: $e^a = e^b$ iff $a = b$ et $e^a < e^b$ iff $a < b$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ (asymptote $y = 0$), $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.
- **Croissances comparées** : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$.
- $t \mapsto e^{kt}$ est croissante si $k > 0$, décroissante si $k < 0$; solutions de $y' = ky$: Ce^{kt} .

4 Méthodes

1. **Signe** : factoriser par $e^u(x) > 0$, étudier le facteur restant.
2. **Équation** : se ramener à $e^u = e^v$ puis $u = v$; pour e^{2x} et e^x , poser $X = e^x > 0$ et écarter les racines négatives.
3. **Étude de $(ax+b)e^{cx}$** : dériver, factoriser par l'exponentielle, tableau de variations, limites par croissance comparée.
4. **Forme indéterminée** : factoriser par le terme dominant ou revenir à $\frac{e^x}{x^n}$, $x^n e^x$.

5 Pièges

- $e^{a+b} \neq e^a + e^b$; $(e^x)^2 = e^{2x} \neq e^{x^2}$.
- Ne jamais écrire $e^{-x} < 0$.
- Ne pas oublier u' dans $(e^u)' = u'e^u$.
- xe^x en $-\infty$ est une forme indéterminée : sa limite 0 vient de la croissance comparée.
- Un coefficient k dans e^{kt} n'est pas un taux : le taux par unité de temps est $e^k - 1$.

L'ESSENTIEL

- L'exponentielle est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$; elle est strictement positive et strictement croissante.
- $e^{(a+b)} = e^a \times e^b$, $e^{(-a)} = 1/e^a$, $(e^a)^n = e^{(na)}$.

- $(e^u)' = u' e^u$.
- En $+\infty$, e^x/x^n tend vers $+\infty$; en $-\infty$, $x^n e^x$ tend vers 0 : l'exponentielle l'emporte.
- $e^u = e^v$ équivaut à $u = v$; pour tout x , $e^x \geq x + 1$.