

Corrigé et barème – Fonction exponentielle

Définition, propriétés algébriques et analytiques, dérivée — programme de Spécialité Maths Terminale

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Exercice 1 – Calculs et dérivées

(4 pts)

a) $e^{-3x+5x+2} = e^{2x+2}$ (1)

b) $\frac{e^{2x+2}}{e^{3x}} = e^{2x+2-3x} = e^{2-x}$ (1)

c) $f'(x) = -2e^{7-2x}$ (1)

d) $g'(x) = 3e^x + (3x+2)e^x = (3x+5)e^x$ (1)

Erreur fréquente — $(e^{x+1})^2 = e^{2x+2}$ (on multiplie tout l'exposant par 2), et non e^{x^2+1} .

Exercice 2 – Équations et inéquations

(4 pts)

a) $5x - 2 = x + 6 \iff 4x = 8 \iff x = 2$; $S = \{2\}$ (1)

b) $x^2 - 7x + 12 = 0$, $\Delta = 1$, racines 3 et 4 ; $S = \{3; 4\}$ (1)

c) $e^{4-x} \geq e^0 \iff 4 - x \geq 0 \iff x \leq 4$; $S =]-\infty; 4]$ (1)

d) $e^{2x} + 5e^x = e^x(e^x + 5) > 0$ pour tout x (en $0 : 1 + 5 = 6 \neq 0$) ; l'élève a « passé aux exposants » dans une somme ; $S = \emptyset$ (1)

Attention — La règle $e^u = e^v \iff u = v$ ne s'applique qu'à une égalité entre deux exponentielles, jamais à une somme.

Exercice 3 – Étude d'une fonction

(4 pts)

a) $f'(x) = 1 \times e^{-2x} + (x+3)(-2)e^{-2x} = (1-2x-6)e^{-2x} = (-2x-5)e^{-2x}$ (1)

b) Signe de $-2x - 5$: positif si $x < -\frac{5}{2}$. f croissante sur $] -\infty; -\frac{5}{2}]$, décroissante ensuite ; maximum $f(-\frac{5}{2}) = \frac{1}{2}e^5 \approx 74,2$ (1)

c) En $-\infty : x+3 \rightarrow -\infty$, $e^{-2x} \rightarrow +\infty$, limite $-\infty$. En $+\infty : f(x) = xe^{-2x} + 3e^{-2x}$; avec $X = 2x$, $xe^{-2x} = \frac{X}{2}e^{-X} \rightarrow 0$, donc limite 0 (1)

d) $f(0) = 3$, $f'(0) = -5$: $y = -5x + 3$ (1)

Le point clé — Après dérivation d'un produit, factoriser par l'exponentielle : le signe de f' est celui du facteur affine restant.

Exercice 4 – Élimination d'un médicament

(4 pts)

a) $C(0) = 15$ mg/L ; $C(2) = 15e^{-0,7} \approx 15 \times 0,4966 \approx 7,45$ mg/L (1)

b) $C'(t) = 15 \times (-0,35)e^{-0,35t} = -5,25e^{-0,35t} < 0$: C est strictement décroissante (1)

c) $-0,35 C(t) = -0,35 \times 15e^{-0,35t} = -5,25e^{-0,35t} = C'(t)$; la vitesse d'élimination est proportionnelle à la concentration présente (1)

d) $c_{n+1} = 15e^{-0,35n}e^{-0,35} = e^{-0,35}c_n$: géométrique de raison $e^{-0,35} \approx 0,7047$; baisse d'environ 29,5 % par heure (et non 35 %) (1)

Repère — Un coefficient $-0,35$ dans l'exposant ne signifie pas une baisse de 35 % : le taux réel est $1 - e^{-0,35}$.

Exercice 5 – Limites et inégalité*(4 pts)*

- a) $e^x - 5x^2 = e^x \left(1 - 5\frac{x^2}{e^x}\right)$; $\frac{x^2}{e^x} \rightarrow 0$ donc la parenthèse tend vers 1 : limite $+\infty$ (1)
- b) $(x^2 - 5x)e^x = x^2e^x - 5xe^x$; $x^2e^x \rightarrow 0$ et $xe^x \rightarrow 0$ (croissances comparées) : limite 0 (1)
- c) $g'(x) = 2e^{2x} - 2 = 2(e^{2x} - 1)$; $g'(x) \geq 0 \iff e^{2x} \geq 1 \iff x \geq 0$: g décroissante sur $] -\infty; 0]$, croissante sur $[0; +\infty[$, minimum $g(0) = 1$ (1)
- d) Pour tout x , $g(x) \geq 1$, soit $e^{2x} - 2x \geq 1$, donc $e^{2x} \geq 2x + 1$; c'est l'inégalité $e^X \geq X + 1$ avec $X = 2x$ (courbe au-dessus de la tangente en 0) (1)

Astuce — Pour prouver une inégalité, étudier la fonction « différence » et montrer que son minimum est positif.