

Équations différentielles

Résoudre $y' = ay + b$, isoler l'unique solution qui vérifie une condition initiale et exploiter le modèle (refroidissement, population, médicament) : c'est ce qu'attend le bac sur ce chapitre.

1 Définitions

- **Équation différentielle** : équation dont l'inconnue est une fonction y dérivable, reliant y et sa dérivée y' .
- **Solution** : fonction f dérivable sur I vérifiant l'égalité pour tout x de I . **Résoudre**, c'est trouver toutes les solutions.
- **Condition initiale** $y(x_0) = y_0$: elle sélectionne une unique solution.
- **Équation** $y' = f$ (f continue) : les solutions sont les primitives de f , de la forme $F + C$.

2 Formules

Équation	Solutions sur $\mathbb{R}$
$y' = ay$	$x \mapsto Ce^{ax}, C \in \mathbb{R}$
$y' = ay + b$ ($a \neq 0$)	$x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}, C \in \mathbb{R}$
$y' = ay + f(x)$, g solution particulière	$x \mapsto g(x) + Ce^{ax}, C \in \mathbb{R}$
$y' = b$ (cas $a = 0$)	$x \mapsto bx + C$

Avec $y(0) = y_0$: $C = y_0 + \frac{b}{a}$. Avec $y(x_0) = y_0$: $C = (y_0 + \frac{b}{a})e^{-ax_0}$.

3 Méthodes

1. **Résoudre** $y' = ay + b$: solution constante c (résoudre $0 = ac + b$), puis $Ce^{ax} + c$, puis condition initiale pour trouver C , puis vérification.
2. **Vérifier qu'une fonction est solution** : calculer g' d'un côté, $ag + b$ de l'autre, comparer, conclure.
3. **Second membre non constant** : chercher g de la forme imposée (affine, xe^{ax} ...), puis montrer que $h - g$ est solution de $y' = ay$.
4. **Méthode d'Euler** : $y_{n+1} = y_n + h(ay_n + b)$; en Python, $y = y + h * (a * y + b)$ dans une boucle.

4 Comportement des solutions

- $a < 0$: toutes les solutions de $y' = ay + b$ tendent vers $-\frac{b}{a}$ en $+\infty$ (équilibre stable : refroidissement, médicament, vitesse limite).
- $a > 0$: les solutions s'éloignent de l'équilibre, sauf la solution constante (population avec prélèvement, capital).
- Une solution de $y' = ay$ ne s'annule jamais, sauf la fonction nulle ; deux solutions distinctes ne se coupent pas.
- Le signe de $f' = aCe^{ax}$ est celui du produit aC .

5 Pièges

- Écrire $Ce^{ax} + b$ au lieu de $Ce^{ax} - \frac{b}{a}$.
- Dire « la solution » sans condition initiale : il y en a une infinité.
- Confondre C et $y(0)$ dès qu'il y a une constante ajoutée.
- Condition en $x_0 \neq 0$: ne pas oublier le facteur e^{-ax_0} .
- Appliquer la formule à $y' = y^2$ ou à $y' = b$ ($a = 0$) : hors cadre.

L'ESSENTIEL

- Les solutions de $y' = ay$ sont les fonctions $x \mapsto Ce^{ax}$, C réel quelconque.
- Les solutions de $y' = ay + b$ ($a \neq 0$) sont $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$: la constante ajoutée est la solution constante.
- Une condition initiale $y(x_0) = y_0$ détermine une unique solution : on résout l'équation d'inconnue C .
- Si g est une solution particulière de $y' = ay + f(x)$, les solutions sont $g + Ce^{ax}$.
- Pour $a < 0$, toutes les solutions tendent vers $-b/a$ en $+\infty$; pour $a > 0$, elles s'en éloignent.