Équations différentielles

Fiche tableaux : les solutions à connaître
(Spécialité maths Terminale)

Les solutions selon la forme de l'équation

Équation	Solutions	Partie particulière
$y' = f$, f continue sur I	$x \mapsto F(x) + C$	F : une primitive de f
$y' = ay$	$x \mapsto Ce^{ax}$	aucune
$y' = ay + b$, $a \neq 0$	$x \mapsto Ce^{ax} - \dfrac{b}{a}$	solution constante : $0 = ac + b$
$y' = b$ (cas $a = 0$)	$x \mapsto bx + C$	primitive de la constante b
$y' = ay + f(x)$	$x \mapsto g(x) + Ce^{ax}$	g donnée, ou trouvée par identification

Exemple : $y' = -4y + 2$: $0 = -4c + 2$ donne $c = 0{,}5$; solutions $x \mapsto Ce^{-4x} + 0{,}5$, $C \in \mathbb{R}$.

La constante C et la condition initiale

Condition (solutions $Ce^{ax} + c$)	Valeur de C
$y(0) = y_0$	$C = y_0 - c$
$y(x_0) = y_0$	$C = (y_0 - c)\, e^{-ax_0}$
$y(x_0) = c$	$C = 0$: c'est la solution constante

Exemple : $y' = y + 1$ et $y(0) = 2$: $c = -1$, $C = 2 - (-1) = 3$, donc $f(x) = 3e^{x} - 1$.

Comportement des solutions Ceˆ(ax) + c

	$C > 0$	$C < 0$	$C = 0$
$a < 0$	décroissante, tend vers c en $+\infty$	croissante, tend vers c en $+\infty$	constante égale à c
$a > 0$	croissante, tend vers $+\infty$	décroissante, tend vers $-\infty$	constante égale à c

Le sens de variation vient de $f'(x) = aCe^{ax}$, du signe de aC. Exemple : $f(x) = 6 - 2e^{-0{,}3x}$: $a < 0$ et $C = -2 < 0$, donc f est croissante et tend vers 6.

Méthode d'Euler

Étape	Formule
départ	x_0 et $y_0 = y(x_0)$, pas $h > 0$
abscisse suivante	$x_{n+1} = x_n + h$
ordonnée suivante	$y_{n+1} = y_n + h \times (ay_n + b)$
en Python	`y = y + h * (a * y + b)` dans une boucle `for`

Exemple : $y' = 2y$, $y(0) = 1$, $h = 0{,}25$: $y_1 = 1 + 0{,}25 \times 2 = 1{,}5$, puis $y_2 = 1{,}5 + 0{,}25 \times 3 = 2{,}25$.

Modèles classiques

Situation	Équation	Valeur d'équilibre
croissance ou désintégration proportionnelle	$N' = kN$	0
refroidissement (loi de Newton)	$T' = -k(T - \theta)$	θ, la température ambiante
chute avec frottement	$v' = g - kv$	$\dfrac{g}{k}$, la vitesse limite

Exemple : $T' = -0{,}2(T - 18)$ s'écrit $T' = -0{,}2T + 3{,}6$; la température tend vers 18 °C.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).