

Devoir surveillé – Équations différentielles

Équations du premier ordre $y' = ay$ et $y' = ay + b$ — définition, solutions, conditions initiales —
programme de Spécialité Maths Terminale

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Solutions générales

(4 pts)

- a) a) Résoudre sur $\mathbb{R}$: $y' = 7y$.
- b) b) Résoudre sur $\mathbb{R}$: $4y' = -y$.
- c) c) Résoudre sur $\mathbb{R}$: $y' = 5y - 20$.
- d) d) Résoudre sur $\mathbb{R}$: $y' = -3y + 2$.

Exercice 2 – Condition initiale et comportement

(4 pts)

- a) Soit f la solution de $y' = -0,6y + 3$ telle que $f(0) = 9$.
 - a) Déterminer l'expression de $f(x)$.
- b) b) Déterminer la limite de f en $+\infty$ et son sens de variation.
- c) c) Calculer $f(5)$, arrondi au millième.
- d) d) Résoudre l'équation $f(x) = 6$: valeur exacte, puis arrondie au centième.

Exercice 3 – Second membre affine

(4 pts)

- a) On considère $(E) : y' = -y + 2x$.
 - a) Déterminer les réels α et β tels que $g(x) = \alpha x + \beta$ soit solution de (E) .
- b) b) Montrer que h est solution de (E) si et seulement si $h - g$ est solution de $y' = -y$.
- c) c) Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 1$.
- d) d) Montrer que la courbe de f est au-dessus de la droite d d'équation $y = 2x - 2$, et que l'écart entre les deux tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 4 – Chauffage d'une pièce

(4 pts)

- a) Un radiateur chauffe une pièce initialement à 12°C . La température $T(t)$, en $^\circ\text{C}$ après t minutes, vérifie $T'(t) = 0,1(24 - T(t))$.
 - a) Écrire l'équation sous la forme $y' = ay + b$ et donner sa solution constante.
- b) b) Déterminer l'expression de $T(t)$.
- c) c) Au bout de combien de minutes, arrondi à la minute, la pièce atteint-elle 20°C ?
- d) d) Un élève affirme que $T(t) = 24 + 12e^{-0,1t}$. Expliquer, sans calculer de dérivée, pourquoi c'est impossible.

Exercice 5 – Méthode d'Euler et solution exacte

(4 pts)

- a) Soit f la solution de $y' = 2y - 1$ telle que $f(0) = 1$.
 - a) Avec la méthode d'Euler de pas $h = 0,5$, calculer les valeurs approchées y_1 et y_2 de $f(0,5)$ et $f(1)$.
- b) b) Déterminer l'expression exacte de $f(x)$.
- c) c) Calculer $f(1)$ arrondi au centième et l'erreur commise par la méthode d'Euler pour $f(1)$.
- d) d) Justifier que, sur $[0; +\infty[$, la méthode d'Euler donne des valeurs inférieures aux valeurs exactes.

Bon courage !