

Corrigé et barème – Équations différentielles

Équations du premier ordre $y' = ay$ et $y' = ay + b$ — définition, solutions, conditions initiales —
programme de Spécialité Maths Terminale

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Exercice 1 – Solutions générales

(4 pts)

- a) $x \mapsto Ce^{7x}$, $C \in \mathbb{R}$. (1)
- b) $y' = -\frac{1}{4}y$: $x \mapsto Ce^{-x/4}$, $C \in \mathbb{R}$. (1)
- c) Constante : $0 = 5c - 20$, $c = 4$; solutions $x \mapsto Ce^{5x} + 4$. (1)
- d) Constante : $0 = -3c + 2$, $c = \frac{2}{3}$; solutions $x \mapsto Ce^{-3x} + \frac{2}{3}$. (1)

Repère — La constante à ajouter est la solution constante $-b/a$, obtenue en résolvant $0 = ac + b$, jamais b lui-même.

Exercice 2 – Condition initiale et comportement

(4 pts)

- a) Constante : $0 = -0,6c + 3$, $c = 5$; solutions $Ce^{-0,6x} + 5$; $C + 5 = 9$ donne $C = 4$: $f(x) = 4e^{-0,6x} + 5$. (1)
- b) $e^{-0,6x} \rightarrow 0$ donc $\lim_{+\infty} f = 5$; $f'(x) = -2,4e^{-0,6x} < 0$: f strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. (1)
- c) $f(5) = 4e^{-3} + 5 \approx 4 \times 0,04979 + 5 \approx 5,199$. (1)
- d) $4e^{-0,6x} = 1 \iff e^{-0,6x} = \frac{1}{4} \iff x = \frac{\ln 4}{0,6} = \frac{2 \ln 2}{0,6} \approx 2,31$. (1)

Erreur fréquente — Écrire $C = f(0)$: quand il y a une constante c , on a $f(0) = C + c$, donc $C = f(0) - c$ (ici $9 - 5 = 4$).

Exercice 3 – Second membre affine

(4 pts)

- a) $g' = \alpha$ et $-g + 2x = (2 - \alpha)x - \beta$; identification : $2 - \alpha = 0$ et $-\beta = \alpha$, soit $\alpha = 2$, $\beta = -2$:
 $g(x) = 2x - 2$. (1)
- b) $(h - g)' = h' - g' = (-h + 2x) - (-g + 2x) = -(h - g)$, et réciproquement $h' = g' - (h - g) = -h + 2x$: équivalence. (1)
- c) $h - g = Ce^{-x}$, donc solutions $Ce^{-x} + 2x - 2$; $f(0) = C - 2 = 1$ donne $C = 3$: $f(x) = 3e^{-x} + 2x - 2$. (1)
- d) $f(x) - (2x - 2) = 3e^{-x} > 0$: courbe au-dessus de d ; $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3e^{-x} = 0$: d est asymptote à la courbe en $+\infty$. (1)

Le point clé — Avec un second membre non constant, on ne cherche plus une solution constante mais une solution particulière de même nature que le second membre, puis on ajoute Ce^{ax} .

Exercice 4 – Chauffage d'une pièce

(4 pts)

- a) $T' = -0,1T + 2,4$; constante : $0 = -0,1c + 2,4$, $c = 24$ (température de consigne du radiateur). (1)
- b) Solutions $Ce^{-0,1t} + 24$; $T(0) = C + 24 = 12$ donne $C = -12$: $T(t) = 24 - 12e^{-0,1t}$. (1)
- c) $24 - 12e^{-0,1t} = 20 \iff e^{-0,1t} = \frac{1}{3} \iff t = 10 \ln 3 \approx 10,99$: environ 11 minutes. (1)
- d) Cette fonction donne $T(0) = 36 \neq 12$: la condition initiale n'est pas respectée. De plus elle serait toujours supérieure à 24 et décroissante, alors que la pièce se réchauffe depuis 12 °C. (1)

Attention — Le signe de C se lit sur la situation : si la valeur initiale est sous l'équilibre, C est négatif et la fonction croît vers l'équilibre.

Exercice 5 – Méthode d'Euler et solution exacte*(4 pts)*

- a) $y_1 = y_0 + h(2y_0 - 1) = 1 + 0,5 \times 1 = 1,5$; $y_2 = 1,5 + 0,5 \times (3 - 1) = 2,5$. (1)
- b) Constante : $0 = 2c - 1$, $c = 0,5$; solutions $Ce^{2x} + 0,5$; $C + 0,5 = 1$ donne $C = 0,5$: $f(x) = 0,5e^{2x} + 0,5$. (1)
- c) $f(1) = 0,5e^2 + 0,5 \approx 3,695 + 0,5 \approx 4,19$; erreur $\approx 4,19 - 2,5 = 1,69$. (1)
- d) $f'(x) = e^{2x}$ et $f''(x) = 2e^{2x} > 0$: f est convexe, donc sa courbe est au-dessus de chacune de ses tangentes. Chaque pas d'Euler suit une tangente et sous-estime ; l'erreur s'accumule. (1)

Astuce — Avant tout calcul, une lecture de l'équation donne le sens de l'erreur d'Euler : $y' = 2y - 1 > 0$ et croissant sur l'intervalle, donc la courbe est convexe et Euler sous-estime.