Devoir surveillé – Sommes de variables aléatoires et loi des grands nombres — niveau ★★★

Durée : 120 min – Calculatrice autorisée – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Automatismes *(3 pts)*

a) Une variable aléatoire X vérifie $E(X) = 4$ et $V(X) = 5$. Calculer $E\big((X-1)(X+3)\big)$.

b) Une variable aléatoire X vérifie $E(X) = 12$ et $\sigma(X) = 3$. Déterminer les réels $a > 0$ et b tels que $Y = aX + b$ vérifie $E(Y) = 0$ et $V(Y) = 1$.

c) Une variable aléatoire a pour variance 2. Déterminer la plus petite taille n d'un échantillon pour laquelle l'inégalité de concentration garantit que la moyenne s'écarte de l'espérance de moins de $0{,}1$ avec une probabilité d'au moins $0{,}99$.

Exercice 2 – Démontrer — Une inégalité qu'on ne peut pas améliorer *(4 pts)*

a) Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et de variance $V(X)$, et $\delta > 0$. On note Y la variable aléatoire qui vaut δ^2 lorsque $|X - \mu| \geqslant \delta$ et 0 sinon. Justifier que, pour toute issue, $Y \leqslant (X-\mu)^2$, puis en déduire, à l'aide de la linéarité de l'espérance, que $P(|X-\mu| \geqslant \delta) \leqslant \dfrac{V(X)}{\delta^2}$.

b) Soit $a > 0$ et r un réel de $]0\,;1[$. B_1 et B_2 sont deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi de Bernoulli de paramètre r, et $Z = a(B_1 - B_2)$. Calculer $E(Z)$ et $V(Z)$.

c) Déterminer la loi de Z, puis comparer $P(|Z| \geqslant a)$ au majorant fourni par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour $\delta = a$. Que peut-on en conclure sur cette inégalité ?

d) Existe-t-il une variable aléatoire W telle que $E(W) = 0$, $V(W) = 1$ et $P(|W| \geqslant 2) = 0{,}3$? Et avec $P(|W| \geqslant 2) = 0{,}25$?

Exercice 3 – Problème — Estimer π au hasard *(5 pts)*

a) On choisit au hasard un point $M(x\,;y)$ dans le carré $[0\,;1]\times[0\,;1]$ et l'on admet que la probabilité qu'il vérifie $x^2+y^2\leqslant 1$ (point du quart de disque) vaut $p=\dfrac{\pi}{4}$. On répète l'expérience n fois de façon indépendante. On considère la fonction Python ci-dessous, où `random()` renvoie un nombre aléatoire de $[0\,;1[$. Que représente `c` à la fin de la boucle ? Pourquoi la valeur renvoyée par `estimation(n)` est-elle le plus souvent proche de π quand n est grand ?

```
from random import random

def estimation(n):
    c = 0
    for k in range(n):
        x = random()
        y = random()
        if x**2 + y**2 <= 1:
            c = c + 1
    return 4 * c / n
```

b) On note $Q_n = 4F_n$. Calculer $E(Q_n)$ et $V(Q_n)$ en fonction de p et de n.

c) On rappelle que $\pi > 3$. Démontrer que $p(1-p) < \dfrac{3}{16}$, puis, sans utiliser de valeur approchée de π, que pour tout réel $\delta>0$, $P\left(|Q_n-\pi|\geqslant\delta\right)\leqslant\dfrac{3}{n\delta^2}$.

d) Combien de points suffit-il de tirer pour que l'inégalité de c) garantisse que Q_n est à moins de $0{,}01$ de π avec une probabilité d'au moins $0{,}95$?

e) Avec $n=10\,000$ points, déterminer la plus petite précision δ que l'inégalité de c) garantit avec une probabilité d'au moins $0{,}9$. Commenter l'efficacité de la méthode.

Exercice 4 – Problème — Surréservation *(4 pts)*

a) Un avion compte 200 places. Chaque passager qui a réservé se présente à l'embarquement avec la probabilité $0{,}9$, indépendamment des autres. La compagnie accepte n réservations, avec $n\geqslant 201$, et l'on note N_n le nombre de passagers qui se présentent. Donner la loi de N_n en l'écrivant comme une somme de variables de Bernoulli, ainsi que son espérance et sa variance.

b) La compagnie veut que la probabilité qu'un passager au moins se présente sans place, c'est-à-dire $P(N_n\geqslant 201)$, soit au plus $0{,}05$. On suppose $0{,}9n<201$. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, majorer $P(N_n\geqslant 201)$ par une expression $g(n)$ dépendant de n.

c) En déduire le plus grand nombre de réservations pour lequel cette méthode garantit la contrainte.

d) On admet que $P(N_n\geqslant 201)$ augmente avec n. À la calculatrice, calculer $P(N_{215}\geqslant 201)$ et $P(N_{216}\geqslant 201)$, arrondis à 10^{-4}. Combien de réservations la compagnie peut-elle réellement accepter ? Comparer avec c) et expliquer l'écart.

Exercice 5 – Pour aller plus loin — Combiner deux instruments *(4 pts)*

a) Pour mesurer une longueur inconnue μ, on dispose de deux instruments. Le premier fournit une mesure X d'espérance μ et de variance $a > 0$, le second une mesure Y d'espérance μ et de variance $b > 0$, et X et Y sont indépendantes. Pour tout réel t, on pose $Z_t = tX + (1-t)Y$. Montrer que $E(Z_t) = \mu$ et exprimer $V(Z_t)$ en fonction de t, a et b.

b) Déterminer la valeur t_0 de t pour laquelle $V(Z_t)$ est minimale, puis montrer que $V(Z_{t_0}) = \dfrac{ab}{a+b}$. Comparer cette variance à a et à b.

c) Application : $a = 4$ et $b = 12$, en mm². Calculer t_0, $V(Z_{t_0})$ et $V\left(Z_{\frac{1}{2}}\right)$, puis majorer $P(|Z_{t_0} - \mu| \geqslant 3)$, l'écart étant en mm. Que penser de la moyenne simple $\dfrac{X+Y}{2}$?

d) On effectue maintenant k mesures avec chaque instrument, toutes indépendantes ; on note $\overline{X}_k$ et $\overline{Y}_k$ les moyennes des mesures de chaque instrument, que l'on combine de façon optimale comme en b). Déterminer le plus petit entier k pour lequel l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev garantit une erreur strictement inférieure à 0,5 mm avec une probabilité d'au moins 0,95.

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).