Devoir surveillé – Sommes de variables aléatoires et loi des grands nombres — niveau ★★

Durée : 120 min – Calculatrice autorisée – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Automatismes *(3 pts)*

a) Une variable aléatoire X a pour écart type 3. Calculer $V(1-4X)$ et $\sigma(1-4X)$.

b) X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes telles que $V(X)=2$ et $V(Y)=7$. Calculer $\sigma(3X-Y+4)$.

c) Une variable aléatoire X a pour espérance 200 et pour écart type 15. Montrer que $P(155 < X < 245) \geqslant \dfrac{8}{9}$.

Exercice 2 – Qui a raison ? *(4 pts)*

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse, puis justifier.

a) « Si X et Y ne sont pas indépendantes, on ne peut pas calculer $E(X+Y)$ à partir de $E(X)$ et de $E(Y)$. »

b) « Si $V(X)=V(Y)=1$, alors $V(X+Y)=2$. »

c) « Si $E(X)=10$ et $V(X)=4$, alors $P(X \geqslant 16) \leqslant \dfrac{1}{9}$. »

d) « Si M_n est la moyenne d'un échantillon de taille n d'une loi d'espérance μ, alors $P(M_n = \mu)$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$. »

Exercice 3 – Problème — La charge d'un ascenseur *(5 pts)*

a) La masse, en kg, d'un usager d'un ascenseur est une variable aléatoire d'espérance 75 et d'écart type 12. Huit usagers montent ; leurs masses $X_1, \dots, X_8$ sont indépendantes et de même loi. On note $S_8 = X_1 + \cdots + X_8$ leur masse totale. Calculer $E(S_8)$, $V(S_8)$ et $\sigma(S_8)$, arrondi au dixième.

b) La charge maximale autorisée est de 720 kg. Montrer que $P(S_8 \geqslant 720) \leqslant 0{,}08$.

c) Chaque usager porte en plus un sac dont la masse B_i, en kg, a pour espérance 6 et pour écart type 4 ; les masses $X_1,\dots,X_8, B_1,\dots,B_8$ sont toutes indépendantes. On note $C_8 = (X_1+B_1)+\cdots+(X_8+B_8)$ la charge totale. Calculer $E(C_8)$ et $V(C_8)$, puis majorer $P(C_8 \geqslant 720)$, arrondi au millième par excès.

d) Le gestionnaire veut afficher le nombre maximal n d'usagers avec sac (au plus 8) pour lequel l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev garantit $P(C_n \geqslant 720) \leqslant 0{,}05$, où C_n est la charge totale de n usagers avec sac. Déterminer ce nombre.

e) Un élève affirme : « L'écart type de la charge de 8 usagers avec sac est 8 fois l'écart type de la charge d'un seul usager avec son sac. » Expliquer son erreur et donner la bonne valeur de $\sigma(C_8)$, arrondie au dixième.

Exercice 4 – Sondage et taille d'échantillon *(4 pts)*

a) Une mairie veut estimer la proportion p d'habitants favorables à un projet. Elle interroge n habitants, choisis de façon indépendante ; on note S_n le nombre d'habitants favorables et $F_n = \dfrac{S_n}{n}$ leur fréquence. Exprimer $E(F_n)$ et $V(F_n)$ en fonction de p et de n, en justifiant.

b) Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto x(1-x)$ sur $[0\,;1]$ et en déduire que $p(1-p) \leqslant \dfrac{1}{4}$.

c) La mairie interroge 1 500 habitants. Montrer que, quelle que soit la valeur de p, $P(|F_{1500} - p| \geqslant 0{,}06) \leqslant 0{,}05$.

d) La mairie souhaite une précision de 0,03 avec le même risque : $P(|F_n - p| \geqslant 0{,}03) \leqslant 0{,}05$ quelle que soit p. Déterminer la plus petite taille n qui convient d'après l'inégalité de concentration. Un conseiller propose 3 000 habitants, « puisque la précision demandée est deux fois meilleure ». Commenter.

Exercice 5 – Problème — La loterie de la kermesse *(4 pts)*

a) À la kermesse d'un lycée, un ticket de loterie coûte 2 euros. Le gain G, en euros, d'un ticket vaut 0, 3 ou 10 avec les probabilités respectives 0,6 ; 0,3 et 0,1. Calculer $E(G)$ et $V(G)$. Le bénéfice de l'organisateur sur un ticket est $B = 2 - G$: calculer $E(B)$ et $V(B)$, puis interpréter $E(B)$.

b) On vend 20 000 tickets, dont les résultats sont indépendants, et l'on note T le bénéfice total de l'organisateur, en euros. Calculer $E(T)$ et $V(T)$, puis montrer que $P(T > 1\,000) \geqslant 0{,}81$.

c) Déterminer le plus grand entier m pour lequel l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev garantit $P(T > m) \geqslant 0{,}95$. Comparer à $E(T)$ et commenter.

d) On considère la fonction Python ci-dessous, où `random()` renvoie un nombre aléatoire de $[0\,;1[$. Que renvoie `kermesse(n)` ? De quelle valeur ce résultat est-il le plus souvent proche quand n est grand ? Justifier.

```
from random import random

def kermesse(n):
    t = 0
    for k in range(n):
        x = random()
        if x < 0.6:
            g = 0
        elif x < 0.9:
            g = 3
        else:
            g = 10
        t = t + 2 - g
    return t / n
```

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).