Corrigé et barème – Sommes de variables aléatoires et loi des grands nombres — niveau ★★

Durée : 120 min – Calculatrice autorisée – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Exercice 1 – Automatismes *(3 pts)*

a) $V(1-4X) = (-4)^2 \times 3^2 = 16 \times 9 = 144$ et $\sigma(1-4X) = |-4| \times 3 = 12$: un écart type n'est jamais négatif. (1 pt : 0,5 + 0,5) (1)

b) Par indépendance, $V(3X - Y + 4) = 3^2 \times 2 + (-1)^2 \times 7 = 18 + 7 = 25$, donc $\sigma(3X - Y + 4) = 5$. (1 pt) (1)

c) $155 < X < 245 \iff |X - 200| < 45$, et $45 = 3 \times 15$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $P(|X - 200| \geqslant 45) \leqslant \dfrac{15^2}{45^2} = \dfrac{1}{9}$; par passage au contraire, $P(155 < X < 245) \geqslant 1 - \dfrac{1}{9} = \dfrac{8}{9}$. (1 pt) (1)

Astuce — Un écart de k écarts types donne directement le majorant $\dfrac{1}{k^2}$: à au moins 3σ de l'espérance, on trouve au plus $\dfrac{1}{9}$ des cas, quelle que soit la loi.

Exercice 2 – Qui a raison ? *(4 pts)*

a) Faux. La linéarité de l'espérance, $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$, est vraie pour toutes variables X et Y définies sur le même univers, sans hypothèse d'indépendance. C'est la formule de la variance d'une somme qui exige l'indépendance. (1 pt) (1)

b) Faux. Contre-exemple : X prend les valeurs -1 et 1 avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$ chacune, et $Y = X$. Alors $E(X) = 0$ et $V(X) = E(X^2) - 0^2 = 1$, donc $V(Y) = 1$. Mais $X + Y = 2X$ et $V(2X) = 2^2 V(X) = 4 \neq 2$. La formule $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ demande l'indépendance, et ici Y est entièrement déterminée par X. (1 pt) (1)

c) Vrai. Si $X \geqslant 16$, alors $X - 10 \geqslant 6$, donc $|X - 10| \geqslant 6$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $P(X \geqslant 16) \leqslant P(|X-10| \geqslant 6) \leqslant \dfrac{4}{6^2} = \dfrac{1}{9}$. (1 pt) (1)

d) Faux. Contre-exemple : avec une pièce équilibrée, $X_i = 1$ pour pile et 0 pour face, donc $\mu = \dfrac{1}{2}$. Pour n impair, nM_n est le nombre de piles, un entier, qui ne peut pas valoir $\dfrac{n}{2}$: $P\left(M_n = \dfrac{1}{2}\right) = 0$ pour tout n impair, et cette probabilité ne tend pas vers 1. La loi faible des grands nombres affirme seulement que, pour tout $\delta > 0$, $P(|M_n - \mu| \geqslant \delta)$ tend vers 0. (1 pt) (1)

Piège — Une affirmation fausse se réfute par un seul contre-exemple ; une affirmation vraie demande une preuve générale, ici une inclusion d'événements suivie de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 3 – Problème — La charge d'un ascenseur *(5 pts)*

a) Les X_i forment un échantillon de taille 8. Par linéarité, $E(S_8) = 8 \times 75 = 600$ kg. Par indépendance, $V(S_8) = 8 \times 12^2 = 1\,152$, donc $\sigma(S_8) = \sqrt{1\,152} \approx 33{,}9$ kg. (1 pt) (1)

b) Si $S_8 \geqslant 720$, alors $S_8 - 600 \geqslant 120$, donc $|S_8 - 600| \geqslant 120$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $P(S_8 \geqslant 720) \leqslant P(|S_8 - 600| \geqslant 120) \leqslant \dfrac{1\,152}{120^2} = \dfrac{1\,152}{14\,400} = 0{,}08$. (1 pt : 0,5 pour l'inclusion, 0,5 pour le calcul) (1)

c) Pour chaque usager, $E(X_i + B_i) = 75 + 6 = 81$ et, par indépendance, $V(X_i + B_i) = 144 + 16 = 160$. Les 8 charges $X_i + B_i$ sont indépendantes et de même loi : $E(C_8) = 8 \times 81 = 648$ kg et $V(C_8) = 8 \times 160 = 1\,280$. Comme $C_8 \geqslant 720$ entraîne $|C_8 - 648| \geqslant 72$: $P(C_8 \geqslant 720) \leqslant \dfrac{1\,280}{72^2} = \dfrac{1\,280}{5\,184} = \dfrac{20}{81} \approx 0{,}2469$, soit au plus $0{,}247$. (1 pt : 0,5 pour $E(C_8)$ et $V(C_8)$, 0,5 pour le majorant) (1)

d) Pour $1 \leqslant n \leqslant 8$: $E(C_n) = 81n \leqslant 648 < 720$ et $V(C_n) = 160n$. Comme $C_n \geqslant 720$ entraîne $|C_n - 81n| \geqslant 720 - 81n$, on obtient $P(C_n \geqslant 720) \leqslant \dfrac{160n}{(720 - 81n)^2}$. Ce majorant augmente avec n : son numérateur croît et son dénominateur, positif, décroît. Pour $n = 8$: $\dfrac{20}{81} \approx 0{,}247 > 0{,}05$. Pour $n = 7$: $\dfrac{1\,120}{153^2} = \dfrac{1\,120}{23\,409} \approx 0{,}048 \leqslant 0{,}05$. Le nombre maximal est donc 7 usagers avec sac. (1 pt : 0,5 pour le majorant en fonction de n et sa monotonie, 0,5 pour la conclusion) (1)

e) Il traite C_8 comme $8(X_1 + B_1)$, c'est-à-dire comme huit fois la même charge ; il trouverait $8\sqrt{160} \approx 101{,}2$ kg. Or les 8 charges sont indépendantes : ce sont les variances qui s'ajoutent, $V(C_8) = 8 \times 160 = 1\,280$, d'où $\sigma(C_8) = \sqrt{1\,280} \approx 35{,}8$ kg, soit $\sqrt{8}$ fois l'écart type d'une charge, et non 8 fois. (1 pt : 0,5 pour l'erreur expliquée, 0,5 pour la bonne valeur) (1)

Méthode — Pour majorer la probabilité d'un dépassement d'un seul côté, on inclut l'événement dans un écart à l'espérance $|S - \mu| \geqslant \delta$, où δ est la distance entre le seuil et l'espérance, puis on applique l'inégalité.

Exercice 4 – Sondage et taille d'échantillon *(4 pts)*

a) $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, où $X_i = 1$ si le i-ième habitant est favorable et $X_i = 0$ sinon ; les X_i sont indépendantes et suivent la loi de Bernoulli de paramètre p. Donc S_n suit la loi $\mathcal{B}(n\,;p)$, avec $E(S_n) = np$ et $V(S_n) = np(1-p)$. Comme $F_n = \dfrac{1}{n}S_n$: $E(F_n) = p$ et $V(F_n) = \dfrac{1}{n^2} \times np(1-p) = \dfrac{p(1-p)}{n}$. (1 pt) (1)

b) $f(x) = x - x^2$ et $f'(x) = 1 - 2x$, positive sur $\left[0\,;\dfrac{1}{2}\right]$ et négative sur $\left[\dfrac{1}{2}\,;1\right]$: f est croissante puis décroissante, de maximum $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$. Donc $p(1-p) \leqslant \dfrac{1}{4}$ pour tout p de $[0\,;1]$. (1 pt : 0,5 pour les variations, 0,5 pour le maximum) (1)

c) D'après l'inégalité de concentration, puis b) : $P(|F_{1500} - p| \geqslant 0{,}06) \leqslant \dfrac{p(1-p)}{1\,500 \times 0{,}06^2} \leqslant \dfrac{0{,}25}{1\,500 \times 0{,}0036} = \dfrac{0{,}25}{5{,}4} \approx 0{,}046$, et $0{,}046 \leqslant 0{,}05$. (1 pt) (1)

d) Il suffit que $\dfrac{0{,}25}{n \times 0{,}03^2} \leqslant 0{,}05$, soit $n \geqslant \dfrac{0{,}25}{0{,}05 \times 0{,}0009} = \dfrac{0{,}25}{0{,}000045} \approx 5\,555{,}6$: il faut au moins 5 556 habitants. Le conseiller se trompe : la précision intervient au carré dans le majorant. Avec $n = 3\,000$, le majorant vaut $\dfrac{0{,}25}{3\,000 \times 0{,}0009} = \dfrac{0{,}25}{2{,}7} \approx 0{,}093 > 0{,}05$: la garantie n'est pas obtenue. (1 pt : 0,5 pour la taille, 0,5 pour le commentaire) (1)

Erreur fréquente — Arrondir la taille trouvée à l'entier le plus proche : $n \geqslant 5\,555{,}6$ impose $n = 5\,556$, car 5 555 habitants ne garantissent plus le risque annoncé.

Exercice 5 – Problème — La loterie de la kermesse *(4 pts)*

a) $E(G) = 0 \times 0{,}6 + 3 \times 0{,}3 + 10 \times 0{,}1 = 0{,}9 + 1 = 1{,}9$ euro. $E(G^2) = 9 \times 0{,}3 + 100 \times 0{,}1 = 2{,}7 + 10 = 12{,}7$, donc $V(G) = 12{,}7 - 1{,}9^2 = 12{,}7 - 3{,}61 = 9{,}09$. Par linéarité, $E(B) = 2 - 1{,}9 = 0{,}1$ euro ; $V(B) = (-1)^2 \times 9{,}09 = 9{,}09$. Sur un grand nombre de tickets, l'organisateur gagne en moyenne 10 centimes par ticket. (1 pt : 0,5 pour G, 0,5 pour B) (1)

b) $T = B_1 + \cdots + B_{20\,000}$ est la somme d'un échantillon de taille 20 000 de la loi de B : par linéarité, $E(T) = 20\,000 \times 0{,}1 = 2\,000$ euros ; par indépendance, $V(T) = 20\,000 \times 9{,}09 = 181\,800$. Si $T \leqslant 1\,000$, alors $T - 2\,000 \leqslant -1\,000$, donc $|T - 2\,000| \geqslant 1\,000$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $P(T \leqslant 1\,000) \leqslant \dfrac{181\,800}{1\,000^2} = 0{,}1818$, donc $P(T > 1\,000) \geqslant 1 - 0{,}1818 = 0{,}8182 \geqslant 0{,}81$. (1 pt : 0,5 pour $E(T)$ et $V(T)$, 0,5 pour la minoration) (1)

c) Pour un entier $m < 2\,000$, $T \leqslant m$ entraîne $|T - 2\,000| \geqslant 2\,000 - m$, donc $P(T \leqslant m) \leqslant \dfrac{181\,800}{(2\,000 - m)^2}$. Il suffit que ce majorant soit au plus 0,05, c'est-à-dire $(2\,000 - m)^2 \geqslant \dfrac{181\,800}{0{,}05} = 3\,636\,000$, soit $2\,000 - m \geqslant \sqrt{3\,636\,000} \approx 1\,906{,}8$, donc $m \leqslant 93{,}1\ldots$: $m = 93$ euros. On attend 2 000 euros en moyenne, mais l'inégalité, valable pour toutes les lois, ne garantit à 95 % qu'un bénéfice supérieur à 93 euros : elle est vraie mais très prudente. (1 pt : 0,5 pour l'inéquation, 0,5 pour m et le commentaire) (1)

d) La boucle simule n tickets : g vaut 0, 3 ou 10 avec les probabilités 0,6 ; 0,3 et 0,1, et t cumule les bénéfices $2 - g$. La fonction renvoie le bénéfice moyen par ticket, $\dfrac{T_n}{n}$. D'après la loi faible des grands nombres, cette moyenne se rapproche de $E(B) = 0{,}1$ euro quand n est grand : pour tout $\delta > 0$, la probabilité qu'elle s'en écarte d'au moins δ tend vers 0. (1 pt : 0,5 pour la lecture du programme, 0,5 pour la loi des grands nombres) (1)

Méthode — Pour trouver le meilleur seuil garanti, on écrit le majorant en fonction du seuil m, puis on résout « majorant $\leqslant$ risque » : la racine carrée donne la distance minimale entre le seuil et l'espérance.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).