Devoir surveillé – Sommes de variables aléatoires et loi des grands nombres — niveau ★

Durée : 60 min – Calculatrice autorisée – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Automatismes *(5 pts)*

a) Une variable aléatoire X vérifie $E(X) = -3$ et $V(X) = 4$. Calculer $E(5 - 2X)$, $V(5 - 2X)$ et $\sigma(5 - 2X)$.

b) X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes telles que $E(X) = 8$, $V(X) = 3$, $E(Y) = -2$ et $V(Y) = 1$. Calculer $E(X - 3Y)$ et $V(X - 3Y)$.

c) On considère un échantillon de taille 25 de la loi d'une variable aléatoire d'espérance 12 et d'écart type 2. On note S_{25} la somme et M_{25} la moyenne de cet échantillon. Calculer $E(S_{25})$, $\sigma(S_{25})$, $E(M_{25})$ et $\sigma(M_{25})$.

d) Une variable aléatoire Z vérifie $E(Z) = 50$ et $V(Z) = 9$. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, majorer $P(|Z - 50| \geqslant 6)$.

e) On note M_{200} la moyenne d'un échantillon de taille 200 de la loi d'une variable aléatoire d'espérance μ et de variance 8. Majorer $P(|M_{200} - \mu| \geqslant 0{,}5)$.

Exercice 2 – Un jeu de fléchettes *(5 pts)*

a) À chaque lancer sur une cible, un joueur marque X points, où X prend les valeurs 0, 1 et 5 avec les probabilités respectives $0{,}5$; $0{,}3$ et $0{,}2$. Calculer $E(X)$.

b) Montrer que $V(X) = 3{,}61$ et en déduire $\sigma(X)$.

c) Chaque lancer rapporte au joueur 2 tickets par point marqué, plus 1 ticket de participation : il gagne $T = 2X + 1$ tickets. Calculer $E(T)$ et $\sigma(T)$.

d) Le joueur effectue 40 lancers, dont les résultats sont indépendants. On note S_{40} le total des points marqués. Calculer $E(S_{40})$, $V(S_{40})$ et $\sigma(S_{40})$, arrondi au centième.

e) On note $M_{40} = \dfrac{S_{40}}{40}$ le score moyen par lancer. À l'aide de l'inégalité de concentration, montrer que $P(0{,}8 < M_{40} < 1{,}8) \geqslant 0{,}639$.

Exercice 3 – Des graines qui germent *(5 pts)*

a) Un sachet contient 400 graines ; chacune germe avec la probabilité $0{,}8$, indépendamment des autres. Pour i de 1 à 400, on pose $X_i = 1$ si la i-ième graine germe et $X_i = 0$ sinon ; on note N le nombre de graines qui germent. Exprimer N à l'aide des X_i, puis donner la loi de X_i, son espérance et sa variance.

b) En déduire la loi de N, ainsi que $E(N)$, $V(N)$ et $\sigma(N)$.

c) À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, majorer $P(|N - 320| \geqslant 16)$.

d) En déduire une minoration de la probabilité que le nombre de graines qui germent soit compris entre 305 et 335, bornes incluses.

e) Le vendeur affirme : « Dans au moins 8 cas sur 10, au moins 301 graines du sachet germent. » Justifier cette affirmation à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 4 – Le dé est-il équilibré ? *(5 pts)*

a) On lance n fois un dé à six faces, de façon indépendante, et l'on note F_n la fréquence d'apparition du 6. On suppose d'abord le dé équilibré. Justifier que F_n est la moyenne d'un échantillon de taille n d'une loi de Bernoulli, dont on donnera l'espérance et la variance.

b) Pour $n = 900$, majorer $P\left(\left|F_{900} - \dfrac{1}{6}\right| \geqslant 0{,}05\right)$: valeur exacte, puis arrondi au millième par excès.

c) Déterminer le plus petit nombre de lancers n qui garantit, d'après l'inégalité de concentration, $P\left(\left|F_n - \dfrac{1}{6}\right| \geqslant 0{,}02\right) \leqslant 0{,}05$.

d) Un joueur lance le dé 10 000 fois et obtient 2 200 fois le 6. Si le dé était équilibré, majorer la probabilité que $F_{10\,000}$ s'écarte de $\dfrac{1}{6}$ d'au moins 0,05. Que peut-on penser de ce dé ?

e) Après une série de 8 lancers sans 6, ce joueur affirme : « D'après la loi des grands nombres, le prochain lancer a plus de chances de donner 6, pour rattraper le retard. » A-t-il raison ?

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).