Corrigé et barème – Sommes de variables aléatoires et loi des grands nombres — niveau ★

Durée : 60 min – Calculatrice autorisée – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Exercice 1 – Automatismes *(5 pts)*

a) Par linéarité de l'espérance, $E(5-2X) = 5 - 2E(X) = 5 - 2\times(-3) = 11$. Pour une transformation affine, la constante disparaît et le coefficient passe au carré : $V(5-2X) = (-2)^2 \times 4 = 16$, donc $\sigma(5-2X) = \sqrt{16} = 4$. (1 pt : 0,5 pour l'espérance, 0,5 pour la variance et l'écart type) (1)

b) Par linéarité : $E(X-3Y) = E(X) - 3E(Y) = 8 - 3\times(-2) = 14$. Comme X et Y sont indépendantes : $V(X-3Y) = V(X) + (-3)^2 V(Y) = 3 + 9\times 1 = 12$. (1 pt : 0,5 + 0,5) (1)

c) Par linéarité, $E(S_{25}) = 25\times 12 = 300$; les variables de l'échantillon étant indépendantes, $V(S_{25}) = 25\times 2^2 = 100$, donc $\sigma(S_{25}) = 10$. Puis $E(M_{25}) = 12$ et $\sigma(M_{25}) = \dfrac{2}{\sqrt{25}} = 0{,}4$. (1 pt : 0,5 pour la somme, 0,5 pour la moyenne) (1)

d) D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $\delta = 6$: $P(|Z-50| \geqslant 6) \leqslant \dfrac{9}{6^2} = \dfrac{9}{36} = 0{,}25$. La probabilité est au plus 0,25. (1 pt) (1)

e) D'après l'inégalité de concentration : $P(|M_{200} - \mu| \geqslant 0{,}5) \leqslant \dfrac{8}{200\times 0{,}5^2} = \dfrac{8}{50} = 0{,}16$. (1 pt) (1)

Méthode — Pour une combinaison de variables, l'espérance se calcule toujours par linéarité ; pour la variance, on vérifie l'indépendance, on met chaque coefficient au carré et la constante disparaît.

Exercice 2 – Un jeu de fléchettes *(5 pts)*

a) $E(X) = 0\times 0{,}5 + 1\times 0{,}3 + 5\times 0{,}2 = 0{,}3 + 1 = 1{,}3$ point. (1 pt) (1)

b) $E(X^2) = 0\times 0{,}5 + 1\times 0{,}3 + 25\times 0{,}2 = 0{,}3 + 5 = 5{,}3$. D'après la formule de König-Huygens, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 5{,}3 - 1{,}69 = 3{,}61$, et $\sigma(X) = \sqrt{3{,}61} = 1{,}9$. (1 pt : 0,5 pour $E(X^2)$, 0,5 pour la conclusion) (1)

c) Par linéarité, $E(T) = 2\times 1{,}3 + 1 = 3{,}6$ tickets. $V(T) = 2^2 \times 3{,}61 = 14{,}44$, donc $\sigma(T) = \sqrt{14{,}44} = 3{,}8$ tickets, soit $2\times 1{,}9$: le ticket de participation ne change pas la dispersion. (1 pt : 0,5 + 0,5) (1)

d) Les 40 scores forment un échantillon de taille 40 de la loi de X. Par linéarité, $E(S_{40}) = 40\times 1{,}3 = 52$ points. Par indépendance, $V(S_{40}) = 40\times 3{,}61 = 144{,}4$, d'où $\sigma(S_{40}) = \sqrt{144{,}4} \approx 12{,}02$ points. (1 pt : 0,5 pour l'espérance, 0,5 pour la variance et l'écart type) (1)

e) $0{,}8 < M_{40} < 1{,}8 \iff |M_{40} - 1{,}3| < 0{,}5$: c'est l'événement contraire de $|M_{40} - 1{,}3| \geqslant 0{,}5$. D'après l'inégalité de concentration, $P(|M_{40} - 1{,}3| \geqslant 0{,}5) \leqslant \dfrac{3{,}61}{40\times 0{,}5^2} = \dfrac{3{,}61}{10} = 0{,}361$. Donc $P(0{,}8 < M_{40} < 1{,}8) \geqslant 1 - 0{,}361 = 0{,}639$. (1 pt : 0,5 pour l'événement contraire, 0,5 pour le calcul) (1)

Erreur fréquente — Écrire $V(2X+1) = 2V(X) + 1$: la constante ne change pas la dispersion et le coefficient 2 passe au carré, d'où $V(2X+1) = 4V(X)$.

Exercice 3 – Des graines qui germent *(5 pts)*

a) $N = X_1 + X_2 + \cdots + X_{400}$. Chaque X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $0{,}8$: $E(X_i) = 0{,}8$ et $V(X_i) = 0{,}8 \times 0{,}2 = 0{,}16$. (1 pt : 0,5 pour l'écriture de N, 0,5 pour la loi) (1)

b) N est la somme de 400 variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre $0{,}8$: N suit la loi binomiale $\mathcal{B}(400\,;0{,}8)$. Par linéarité, $E(N) = 400 \times 0{,}8 = 320$; par indépendance, $V(N) = 400 \times 0{,}16 = 64$, donc $\sigma(N) = 8$. (1 pt) (1)

c) Avec $\delta = 16$: $P(|N - 320| \geqslant 16) \leqslant \dfrac{64}{16^2} = \dfrac{64}{256} = 0{,}25$. (1 pt) (1)

d) N est un entier, donc $305 \leqslant N \leqslant 335 \iff 304 < N < 336 \iff |N - 320| < 16$: c'est l'événement contraire de celui de c). Ainsi $P(305 \leqslant N \leqslant 335) \geqslant 1 - 0{,}25 = 0{,}75$. (1 pt : 0,5 pour la traduction de l'événement, 0,5 pour la minoration) (1)

e) Si $N \leqslant 300$, alors $N - 320 \leqslant -20$, donc $|N - 320| \geqslant 20$. Ainsi $P(N \leqslant 300) \leqslant P(|N - 320| \geqslant 20) \leqslant \dfrac{64}{20^2} = 0{,}16$. Par passage au contraire, $P(N \geqslant 301) \geqslant 1 - 0{,}16 = 0{,}84 \geqslant 0{,}8$: l'affirmation est justifiée. (1 pt : 0,5 pour l'inclusion des événements, 0,5 pour la conclusion) (1)

Piège — Le contraire de $|N - 320| \geqslant 16$ est $|N - 320| < 16$, bornes exclues : pour une variable à valeurs entières, $304 < N < 336$ s'écrit $305 \leqslant N \leqslant 335$.

Exercice 4 – Le dé est-il équilibré ? *(5 pts)*

a) On pose $X_i = 1$ si le i-ième lancer donne 6 et $X_i = 0$ sinon. Les X_i sont indépendantes et suivent la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{6}$: elles forment un échantillon de taille n, et $F_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ est sa moyenne. $E(X_i) = \dfrac{1}{6}$ et $V(X_i) = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{5}{6} = \dfrac{5}{36}$. (1 pt) (1)

b) D'après l'inégalité de concentration : $P\left(\left|F_{900} - \dfrac{1}{6}\right| \geqslant 0{,}05\right) \leqslant \dfrac{5/36}{900 \times 0{,}05^2} = \dfrac{5}{36 \times 2{,}25} = \dfrac{5}{81} \approx 0{,}0617$, soit au plus 0,062. (1 pt) (1)

c) Il suffit que $\dfrac{5/36}{n \times 0{,}02^2} \leqslant 0{,}05$, c'est-à-dire $n \geqslant \dfrac{5}{36 \times 0{,}0004 \times 0{,}05} = \dfrac{5}{0{,}00072} \approx 6\,944{,}4$. Le plus petit entier qui convient est $n = 6\,945$ lancers. (1 pt) (1)

d) Si le dé est équilibré : $P\left(\left|F_{10\,000} - \dfrac{1}{6}\right| \geqslant 0{,}05\right) \leqslant \dfrac{5/36}{10\,000 \times 0{,}0025} = \dfrac{5}{900} = \dfrac{1}{180} \approx 0{,}0056$. Or la fréquence observée vaut $\dfrac{2\,200}{10\,000} = 0{,}22$ et $0{,}22 - \dfrac{1}{6} \approx 0{,}053 \geqslant 0{,}05$: avec un dé équilibré, un tel écart aurait une probabilité inférieure à 0,6 %. On a donc de bonnes raisons de penser que le dé n'est pas équilibré et qu'il favorise le 6, sans que ce soit une certitude. (1 pt : 0,5 pour le majorant, 0,5 pour la conclusion nuancée) (1)

e) Non. Les lancers sont indépendants : la probabilité d'obtenir 6 au lancer suivant ne dépend pas des résultats précédents. La loi faible des grands nombres dit seulement que, pour tout $\delta > 0$, $P(|F_n - p| \geqslant \delta)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$: un écart de la fréquence devient improbable parce qu'il est dilué dans un grand nombre de lancers, pas parce qu'il est compensé. (1 pt) (1)

Astuce — Pour une fréquence, la variance d'une seule épreuve est $p(1-p)$: on la calcule une fois, puis l'inégalité de concentration la divise par $n\delta^2$.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).