

Devoir surveillé – Raisonnement par récurrence et limites de suites — niveau ★★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Nom : _____

Date : _____

Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Automatismes

(3 pts)

- a) Déterminer la limite de la suite définie par $u_n = \frac{n^2 + (-1)^n n}{2n^2 + 1}$.
- b) Déterminer la limite de la suite définie par $v_n = \frac{3^{n+1} - 2^{2n}}{4^n + 3^n}$.
- c) Déterminer la limite de la suite définie pour $n \geq 1$ par $w_n = n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right)$.
- d) Déterminer la limite de la suite définie pour $n \geq 1$ par $t_n = \frac{n + \sin(n^2)}{\sqrt{n}}$.

Exercice 2 – Démontrer — Bernoulli et au-delà

(4 pts)

- a) Soit a un réel strictement positif. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $(1 + a)^n \geq 1 + na$.
- b) En déduire que, si $q > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.
- c) En déduire que, si $0 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.
- d) Généralisation : démontrer que, pour tout réel $a \geq 0$ et tout entier naturel n , $(1 + a)^n \geq 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2$.
- e) En déduire la limite de la suite $\left(\frac{n}{2^n} \right)$.

Exercice 3 – Une racine itérée

(5 pts)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$.

- a) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n < u_{n+1} < 3$.
 - a) En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.
 - b) Montrer que, pour tout entier naturel n , $3 - u_{n+1} \leq \frac{2}{3}(3 - u_n)$.
 - c) En déduire que, pour tout entier naturel n , $0 < 3 - u_n \leq 3 \left(\frac{2}{3} \right)^n$, et retrouver la limite de (u_n) .
 - d) Déterminer un rang à partir duquel u_n est une valeur approchée de 3 à 10^{-3} près.

Exercice 4 – Vrai ou faux ?

(3 pts)

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et le démontrer.

- a) « Si (u_n) converge et si (v_n) ne converge pas, alors $(u_n + v_n)$ ne converge pas. »
 - a) « Si $\lim(u_n v_n) = 0$, alors $\lim u_n = 0$ ou $\lim v_n = 0$. »
 - b) « Pour démontrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n , il suffit de démontrer $P(0)$ et que, pour tout n , $P(n)$ implique $P(n+2)$. »

Exercice 5 – Problème — Deux sommes, deux destins*(5 pts)*

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ et $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

a) Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $S_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.

a) En déduire que la suite (S_n) converge, et donner un encadrement de sa limite par deux rationnels.

b) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$.

c) Démontrer que, pour tout entier naturel p , $H_{2^p} \geq 1 + \frac{p}{2}$, puis déterminer la limite de (H_n) en rédigeant soigneusement l'argument.

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).