

Corrigé et barème – Raisonnement par récurrence et limites de suites — niveau ★★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Exercice 1 – Automatismes

(3 pts)

- a) Pour $n \geq 1$: $u_n = \frac{1 + \frac{(-1)^n}{n}}{2 + \frac{1}{n^2}}$. Comme $\left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n} \rightarrow 0$, le numérateur tend vers 1 et le dénominateur vers 2 : $\lim u_n = \frac{1}{2}$. (0,5 pt) (0,75)
- b) $2^{2n} = 4^n$. En divisant par 4^n : $v_n = \frac{3\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1}{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n}$. Comme $0 < \frac{3}{4} < 1$, $\lim \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$, d'où $\lim v_n = -1$. (1 pt) (0,75)
- c) Forme « $\infty \times 0$ » : avec la quantité conjuguée, $w_n = n \times \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}$, qui tend vers $\frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$. (1 pt) (0,75)
- d) $\sin(n^2) \geq -1$ donc $t_n \geq \frac{n-1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}$. Cette minorante tend vers $+\infty$, donc par comparaison $\lim t_n = +\infty$. (0,5 pt) (0,75)

Astuce — Un terme borné comme $\sin(n^2)$ ou $(-1)^n$ ne se « calcule » pas : on l'encadre entre -1 et 1 et on laisse agir les théorèmes de comparaison.

Exercice 2 – Démontrer — Bernoulli et au-delà

(4 pts)

- a) Soit $P(n)$: « $(1+a)^n \geq 1+na$ ».
Initialisation : $(1+a)^0 = 1 = 1+0 \times a$.
Hérédité : si $(1+a)^n \geq 1+na$, on multiplie par $1+a > 0$: $(1+a)^{n+1} \geq (1+na)(1+a) = 1 + (n+1)a + na^2 \geq 1 + (n+1)a$ car $na^2 \geq 0$.
Conclusion : $P(n)$ est vraie pour tout n . (1,5 pt) (0,8)
- b) On pose $a = q - 1 > 0$: $q^n = (1+a)^n \geq 1+na$. Comme $a > 0$, $\lim(1+na) = +\infty$, donc par comparaison $\lim q^n = +\infty$. (0,5 pt) (0,8)
- c) $\frac{1}{q} > 1$, donc d'après b), $\lim \left(\frac{1}{q}\right)^n = +\infty$. Or $q^n = \frac{1}{\left(\frac{1}{q}\right)^n}$, donc par inverse $\lim q^n = 0$. (0,5 pt) (0,8)
- d) **Initialisation** : $(1+a)^0 = 1 = 1+0+0$.
Hérédité : si l'inégalité est vraie au rang n , en multipliant par $1+a > 0$: $(1+a)^{n+1} \geq 1+na + \frac{n(n-1)}{2}a^2 + a + na^2 + \frac{n(n-1)}{2}a^3$. Comme $\frac{n(n-1)}{2}a^3 \geq 0$ et $\frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}$, on obtient $(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a + \frac{(n+1)n}{2}a^2$.
Conclusion : l'inégalité est vraie pour tout n . (1 pt) (0,8)
- e) Avec $a = 1$: $2^n \geq 1+n + \frac{n(n-1)}{2} \geq \frac{n(n-1)}{2}$. Pour $n \geq 2$: $0 \leq \frac{n}{2^n} \leq \frac{2n}{n(n-1)} = \frac{2}{n-1}$. Les deux bornes tendent vers 0, donc par les gendarmes $\lim \frac{n}{2^n} = 0$. (0,5 pt) (0,8)

Méthode — L'inégalité de Bernoulli minore q^n par une fonction affine de n : c'est assez pour la divergence, mais pour battre n au dénominateur il faut une minoration du second degré.

Exercice 3 – Une racine itérée

(5 pts)

- a) La fonction $g : x \mapsto \sqrt{2x+3}$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ (composée de $x \mapsto 2x+3$, croissante, et de la racine carrée, croissante).

Initialisation : $u_0 = 0, u_1 = \sqrt{3} \approx 1,73 : 0 \leq 0 < \sqrt{3} < 3$.

Hérédité : si $0 \leq u_n < u_{n+1} < 3$, alors $g(u_n) < g(u_{n+1}) < g(3)$, soit $u_{n+1} < u_{n+2} < \sqrt{9} = 3$; de plus $u_{n+1} > u_n \geq 0$.

Conclusion : la propriété est vraie pour tout n . (1,5 pt) (1)

- b) (u_n) est croissante et majorée par 3 : elle converge vers $\ell \in [0; 3]$. La fonction g est continue sur $[0; 3]$, donc $\ell = \sqrt{2\ell+3}$, d'où $\ell^2 = 2\ell+3$, soit $(\ell-3)(\ell+1) = 0$. Comme $\ell \geq 0$, $\ell = 3$. (1 pt) (1)
- c) $3 - u_{n+1} = 3 - \sqrt{2u_n+3} = \frac{9 - (2u_n+3)}{3 + \sqrt{2u_n+3}} = \frac{2(3-u_n)}{3 + u_{n+1}}$. Or $u_{n+1} \geq 0$ donne $3 + u_{n+1} \geq 3$, et $3 - u_n > 0$, donc $3 - u_{n+1} \leq \frac{2(3-u_n)}{3} = \frac{2}{3}(3-u_n)$. (1 pt) (1)
- d) $3 - u_n > 0$ d'après a). Récurrence pour la majoration : au rang 0, $3 - u_0 = 3 \leq 3 \left(\frac{2}{3}\right)^0$; si $3 - u_n \leq 3 \left(\frac{2}{3}\right)^n$, alors d'après c) $3 - u_{n+1} \leq \frac{2}{3} \times 3 \left(\frac{2}{3}\right)^n = 3 \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$. Comme $0 < \frac{2}{3} < 1$, $3 \left(\frac{2}{3}\right)^n \rightarrow 0$: par les gendarmes $3 - u_n \rightarrow 0$, donc $\lim u_n = 3$. (1 pt) (1)
- e) Il suffit que $3 \left(\frac{2}{3}\right)^n \leq 10^{-3}$, soit $\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq \frac{1}{3000} \approx 3,33 \times 10^{-4}$. À la calculatrice, $\left(\frac{2}{3}\right)^{19} \approx 4,51 \times 10^{-4}$ et $\left(\frac{2}{3}\right)^{20} \approx 3,01 \times 10^{-4}$; la suite $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$ décroît, donc pour tout $n \geq 20$, $0 < 3 - u_n \leq 10^{-3}$. (0,5 pt) (1)

Piège — La majoration $3 \left(\frac{2}{3}\right)^n$ garantit la précision à partir du rang 20, mais ce rang n'est pas forcément le plus petit : la majoration peut être grossière.

Exercice 4 – Vrai ou faux ?

(3 pts)

- a) Vrai. Par l'absurde : si $(u_n + v_n)$ convergeait vers L , alors $v_n = (u_n + v_n) - u_n$ convergerait vers $L - \lim u_n$ (limite d'une différence), ce qui contredit l'hypothèse. (1 pt) (1)
- b) Faux. Avec $u_n = 1 + (-1)^n$ et $v_n = 1 - (-1)^n$: $u_n v_n = 1 - ((-1)^n)^2 = 0$ pour tout n , mais (u_n) vaut alternativement 2 et 0, (v_n) alternativement 0 et 2 : aucune des deux ne tend vers 0. (1 pt) (1)
- c) Faux. Ces deux étapes ne prouvent $P(n)$ que pour les n pairs. Contre-exemple : $P(n)$: « n est pair ». $P(0)$ est vraie, et si n est pair, $n+2$ l'est aussi ; pourtant $P(1)$ est fausse. (1 pt) (1)

Erreur fréquente — « Produit nul » n'entraîne pas « un facteur nul » pour des limites : deux suites qui s'annulent à tour de rôle ont un produit nul sans qu'aucune ne converge.

Exercice 5 – Problème — Deux sommes, deux destins

(5 pts)

a) **Initialisation** : $S_1 = 1 \leq 2 - 1 = 1$.

Hérédité : si $S_n \leq 2 - \frac{1}{n}$, alors $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$. Or $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \geq \frac{1}{(n+1)^2}$ car $n(n+1) \leq (n+1)^2$. Donc $-\frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq -\frac{1}{n+1}$, et $S_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$.

Conclusion : l'inégalité est vraie pour tout $n \geq 1$. (1,5 pt) (1,25)

b) $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$: (S_n) est croissante ; et $S_n \leq 2 - \frac{1}{n} < 2$: elle est majorée par 2. Elle converge donc vers un réel ℓ . Par passage à la limite dans $S_n \leq 2$, $\ell \leq 2$; par croissance, $\ell \geq S_2 = \frac{5}{4}$. Ainsi $\frac{5}{4} \leq \ell \leq 2$. (1 pt) (1,25)

c) $H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$: cette somme compte n termes, chacun supérieur ou égal à $\frac{1}{2n}$ (car $k \leq 2n$).

Donc $H_{2n} - H_n \geq n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$. (1 pt) (1,25)d) **Initialisation** : $H_{2^0} = H_1 = 1 \geq 1 + 0$.

Hérédité : si $H_{2^p} \geq 1 + \frac{p}{2}$, alors d'après c) avec $n = 2^p$: $H_{2^{p+1}} = H_{2 \times 2^p} \geq H_{2^p} + \frac{1}{2} \geq 1 + \frac{p+1}{2}$.

Limite : (H_n) est croissante (on ajoute $\frac{1}{n+1} > 0$). Soit A un réel ; on choisit p tel que $1 + \frac{p}{2} > A$. Pour tout $n \geq 2^p$, $H_n \geq H_{2^p} > A$. Tout intervalle $]A; +\infty[$ contient donc tous les termes à partir d'un certain rang : $\lim H_n = +\infty$. (1,5 pt) (1,25)

Astuce — Majorer par $2 - \frac{1}{n}$ plutôt que par 2 rend la récurrence possible : une inégalité plus forte, qui dépend de n , est souvent plus facile à faire passer de n à $n+1$.