

Devoir surveillé – Raisonnement par récurrence et limites de suites — niveau ★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Nom : _____

Date : _____

Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Automatismes

(3 pts)

- a) Déterminer la limite de la suite définie pour $n \geq 2$ par $u_n = \frac{3n^2 - 2n + 1}{1 - n^2}$.
- b) Déterminer la limite de la suite définie par $v_n = \frac{2^n - 5^n}{5^n + 1}$.
- c) Déterminer la limite de la suite définie par $w_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n}$.
- d) Déterminer la limite de la suite définie par $t_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$.

Exercice 2 – Démontrer — Une somme télescopique

(4 pts)

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $S_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.

- a) Calculer S_1 , S_2 et S_3 sous forme de fractions irréductibles.
 - a) Conjecturer une expression de S_n en fonction de n , puis la démontrer par récurrence.
 - b) En déduire la limite de la suite (S_n) .
 - c) Déterminer le plus petit entier n tel que $S_n \geq 0,999$.

Exercice 3 – Suite homographique

(5 pts)

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{4x+2}{x+3}$, et (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

- a) Étudier le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$.
 - a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.
 - b) En déduire que (u_n) converge, puis déterminer sa limite.
 - c) On pose, pour tout n , $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}$. Montrer que (v_n) est géométrique de raison $\frac{2}{5}$, exprimer v_n en fonction de n , puis retrouver la limite de (u_n) .
 - d) Écrire une fonction Python `seuil(e)` qui renvoie le plus petit entier n tel que $2 - u_n < e$, et donner la valeur renvoyée par `seuil(0.01)`.

Exercice 4 – Qui a raison ?*(3 pts)*

- a) Nora affirme : « La suite (u_n) est croissante et majorée par 5, donc sa limite est 5. » A-t-elle raison ? Justifier.
- b) Yanis affirme : « Si tous les termes de (u_n) sont strictement positifs et si (u_n) converge vers ℓ , alors $\ell > 0$. » A-t-il raison ? Justifier.
- c) Soit $P(n)$ la propriété « $2^n \geq n^2$ ». Sami affirme : « Si $P(n)$ est vraie pour un entier $n \geq 3$, alors $P(n+1)$ l'est aussi. Mais $P(3)$ est fausse, donc $P(n)$ est fausse pour tout $n \geq 3$. » Démontrer l'hérédité annoncée, puis dire si la conclusion de Sami est correcte.

Exercice 5 – Problème — La balle qui rebondit*(5 pts)*

On lâche une balle d'une hauteur de 2 m. Après chaque rebond, elle remonte à 60 % de la hauteur précédente. On note $h_0 = 2$ et h_n la hauteur (en m) atteinte après le n -ième rebond. On note D_n la distance totale parcourue (en m) au moment où la balle touche le sol pour la $(n+1)$ -ième fois ; ainsi $D_0 = 2$.

- a) Exprimer h_n en fonction de n et déterminer la limite de (h_n) .
 - a) Justifier que $D_{n+1} = D_n + 4 \times 0,6^{n+1}$, puis démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $D_n = 8 - 6 \times 0,6^n$.
 - b) Étudier le sens de variation de (D_n) , déterminer sa limite et interpréter ce résultat.
 - c) À l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de quel rebond la hauteur atteinte est inférieure à 1 cm.
 - d) Déterminer le plus petit entier n tel que $D_n \geq 7,99$.

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).