

Corrigé et barème – Raisonnement par récurrence et limites de suites — niveau ★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Exercice 1 – Automatismes

(3 pts)

- a) Forme « $\frac{\infty}{\infty}$ » : $u_n = \frac{n^2 \left(3 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{n^2 \left(\frac{1}{n^2} - 1\right)} = \frac{3 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} - 1}$, qui tend vers $\frac{3}{-1} = -3$. (0,5 pt) (0,75)
- b) On divise numérateur et dénominateur par 5^n : $v_n = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n - 1}{1 + \left(\frac{1}{5}\right)^n}$. Comme $0 < \frac{2}{5} < 1$ et $0 < \frac{1}{5} < 1$, les puissances tendent vers 0, donc $\lim v_n = \frac{-1}{1} = -1$. (1 pt) (0,75)
- c) Forme « $\infty - \infty$ » : avec la quantité conjuguée, $w_n = \frac{(n+3) - n}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}} = \frac{3}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}}$. Le dénominateur tend vers $+\infty$, donc $\lim w_n = 0$. (1 pt) (0,75)
- d) $-\frac{1}{n^2+1} \leq \frac{(-1)^n}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1}$ et les deux bornes tendent vers 0 : par les gendarmes, ce quotient tend vers 0, donc $\lim t_n = 2$. (0,5 pt) (0,75)

Méthode — Pour un quotient de puissances a^n , on divise par la puissance de plus grande base : toutes les autres deviennent des q^n avec $0 < q < 1$, qui tendent vers 0.

Exercice 2 – Démontrer — Une somme télescopique

(4 pts)

a) $S_1 = \frac{1}{2}$; $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$; $S_3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$. (1 pt) (1)

b) Conjecture : $S_n = \frac{n}{n+1}$.

Initialisation : $S_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$.

Hérédité : si $S_n = \frac{n}{n+1}$ pour un entier $n \geq 1$, alors $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$.

Conclusion : pour tout $n \geq 1$, $S_n = \frac{n}{n+1}$. (1,5 pt) (1)

c) $S_n = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$ et $\lim \frac{1}{n} = 0$, donc $\lim S_n = 1$. (0,5 pt) (1)

d) $S_n \geq 0,999 \iff n \geq 0,999(n+1) \iff 0,001n \geq 0,999 \iff n \geq 999$ (on a multiplié par $n+1 > 0$). Le plus petit entier cherché est $n = 999$. (1 pt) (1)

Astuce — Calculer les premiers termes sous forme de fractions irréductibles fait apparaître le motif $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$: la conjecture vient des calculs, la récurrence la valide.

Exercice 3 – Suite homographique

(5 pts)

- a) f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et $f'(x) = \frac{4(x+3) - (4x+2) \times 1}{(x+3)^2} = \frac{10}{(x+3)^2} > 0$: f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$. (0,5 pt) (1)
- b) Soit $P(n) : \ll 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2 \gg$.
Initialisation : $u_0 = 0$ et $u_1 = f(0) = \frac{2}{3}$, donc $0 \leq 0 \leq \frac{2}{3} \leq 2$.
Hérédité : si $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$, la croissance de f sur $[0; 2]$ donne $f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(2)$, soit $\frac{2}{3} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \frac{10}{5} = 2$, et a fortiori $0 \leq u_{n+1}$.
Conclusion : $P(n)$ est vraie pour tout n . (1,5 pt) (1)
- c) (u_n) est croissante et majorée par 2, donc elle converge vers un réel $\ell \in [0; 2]$. Comme f est continue sur $[0; 2]$, $\ell = f(\ell) : \ell(\ell+3) = 4\ell+2 \iff \ell^2 - \ell - 2 = 0 \iff (\ell-2)(\ell+1) = 0$. Comme $\ell \geq 0$, $\ell = 2$. (1 pt) (1)
- d) $u_{n+1} - 2 = \frac{4u_n + 2 - 2u_n - 6}{u_n + 3} = \frac{2(u_n - 2)}{u_n + 3}$ et $u_{n+1} + 1 = \frac{5(u_n + 1)}{u_n + 3}$, donc $v_{n+1} = \frac{2(u_n - 2)}{5(u_n + 1)} = \frac{2}{5}v_n$. Avec $v_0 = -2 : v_n = -2 \times 0,4^n$. De $v_n(u_n + 1) = u_n - 2$ on tire $u_n = \frac{2 + v_n}{1 - v_n}$; or $\lim v_n = 0$ car $0 < 0,4 < 1$, donc $\lim u_n = \frac{2}{1} = 2$. (1 pt) (1)
- e)
- ```
def seuil(e):
 n = 0
 u = 0
 while 2 - u >= e:
 u = (4*u + 2) / (u + 3)
 n = n + 1
 return n
```

D'après d),  $2 - u_n = \frac{-3v_n}{1 - v_n} = \frac{6 \times 0,4^n}{1 + 2 \times 0,4^n} : 2 - u_6 \approx 0,024$  et  $2 - u_7 \approx 0,0098$ . La fonction renvoie 7. (1 pt) (1)

**Piège** — L'équation  $\ell = f(\ell)$  a ici deux solutions, 2 et  $-1$  : c'est l'encadrement obtenu par récurrence ( $u_n \geq 0$ ) qui permet d'éliminer  $-1$ .

**Exercice 4 – Qui a raison ?**

(3 pts)

- a) Non. Le théorème de convergence monotone donne seulement une limite  $\ell \leq 5$ . Contre-exemple :  $u_n = 1 - \frac{1}{n+1}$  est croissante, majorée par 5, mais tend vers 1. (1 pt) (1)
- b) Non. Le passage à la limite ne conserve que les inégalités larges : on obtient  $\ell \geq 0$ . Contre-exemple :  $u_n = \frac{1}{n+1} > 0$  mais  $\lim u_n = 0$ . (0,5 pt) (1)
- c) **Hérédité** : soit  $n \geq 3$  avec  $2^n \geq n^2$ . Alors  $2^{n+1} = 2 \times 2^n \geq 2n^2$ . Or  $2n^2 - (n+1)^2 = n^2 - 2n - 1 = (n-1)^2 - 2 \geq 2^2 - 2 = 2 > 0$  car  $n-1 \geq 2$ . Donc  $2^{n+1} \geq (n+1)^2$ .  
**Conclusion de Sami** : fausse. Une initialisation ratée à  $n = 3$  ( $8 < 9$ ) ne prouve rien pour les rangs suivants :  $P(4)$  est vraie ( $16 \geq 16$ ), et avec l'hérédité,  $P(n)$  est vraie pour tout  $n \geq 4$ . (1,5 pt) (1)

**Erreur fréquente** — Une hérédité seule ne dit rien : il faut trouver un rang où la propriété est vraie. Si l'initialisation échoue à un rang, on essaie le suivant avant de conclure.

**Exercice 5 – Problème — La balle qui rebondit****(5 pts)**

- a) Chaque rebond multiplie la hauteur par 0,6 :  $(h_n)$  est géométrique de raison 0,6 et de premier terme 2, donc  $h_n = 2 \times 0,6^n$ . Comme  $0 < 0,6 < 1$ ,  $\lim h_n = 0$ . (1 pt) (1)
- b) Entre le  $(n + 1)$ -ième et le  $(n + 2)$ -ième contact, la balle monte de  $h_{n+1}$  puis redescend de  $h_{n+1}$  :  
 $D_{n+1} = D_n + 2h_{n+1} = D_n + 4 \times 0,6^{n+1}$ .  
**Initialisation** :  $8 - 6 \times 0,6^0 = 2 = D_0$ .  
**Hérédité** : si  $D_n = 8 - 6 \times 0,6^n$ , alors, comme  $6 \times 0,6^n = 10 \times 0,6^{n+1}$ ,  $D_{n+1} = 8 - 10 \times 0,6^{n+1} + 4 \times 0,6^{n+1} = 8 - 6 \times 0,6^{n+1}$ .  
**Conclusion** : la formule est vraie pour tout  $n$ . (1,5 pt) (1)
- c)  $D_{n+1} - D_n = 4 \times 0,6^{n+1} > 0$  :  $(D_n)$  est strictement croissante.  $\lim 0,6^n = 0$  donc  $\lim D_n = 8$ .  
Interprétation : la distance parcourue augmente à chaque rebond mais reste toujours inférieure à 8 m, et se rapproche de 8 m autant qu'on veut. (1 pt) (1)
- d)  $h_n < 0,01 \iff 0,6^n < 0,005$ . À la calculatrice,  $0,6^{10} \approx 0,00605$  et  $0,6^{11} \approx 0,00363$  ; la suite  $(0,6^n)$  étant décroissante, c'est à partir du 11<sup>e</sup> rebond ( $h_{11} \approx 0,0073$  m). (0,5 pt) (1)
- e)  $D_n \geq 7,99 \iff 6 \times 0,6^n \leq 0,01 \iff 0,6^n \leq \frac{1}{600} \approx 0,001\,667$ . Or  $0,6^{12} \approx 0,002\,18$  et  $0,6^{13} \approx 0,001\,31$  : le plus petit entier est  $n = 13$ . (1 pt) (1)

**Méthode** — Pour justifier une relation de récurrence en contexte, on décrit précisément ce qui se passe entre deux étapes consécutives, ici la montée puis la descente de même hauteur.