

Devoir surveillé – Raisonnement par récurrence et limites de suites — niveau ★

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Nom : _____

Date : _____

Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Automatismes

(5 pts)

- a) Déterminer la limite de la suite définie pour $n \geq 1$ par $u_n = 3 + \frac{2}{\sqrt{n}}$.
- b) Déterminer la limite de la suite définie par $v_n = n^2 - 5n + 1$.
- c) Déterminer la limite de la suite définie par $w_n = 7 \times 0,8^n - 1$.
- d) Déterminer la limite de la suite définie pour $n \geq 2$ par $t_n = \frac{4n+1}{2n-3}$.
- e) Déterminer la limite de la suite définie par $s_n = -2 \times 1,5^n$.

Exercice 2 – Formule explicite et limite

(5 pts)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 2u_n - 5$.

a) Calculer u_1 et u_2 .

- a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n = 3 \times 2^n + 5$.
- b) Calculer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de n et en déduire le sens de variation de (u_n) .
- c) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Exercice 3 – Majorer puis converger

(5 pts)

On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + 3$.

a) Calculer v_1 et v_2 .

- a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $v_n \leq 6$.
- b) Montrer que, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} - v_n = \frac{6 - v_n}{2}$, puis en déduire le sens de variation de (v_n) .
- c) Justifier que la suite (v_n) converge. On admet que sa limite ℓ vérifie $\ell = \frac{1}{2}\ell + 3$: déterminer ℓ .

Exercice 4 – Qui a raison ?

(5 pts)

- a) Léa affirme : « La suite définie par $a_n = n + (-1)^n$ tend vers $+\infty$, car $a_n \geq n - 1$ pour tout n . » A-t-elle raison ? Justifier.
- b) Hugo affirme : « La suite définie pour $n \geq 1$ par $b_n = \frac{\sin n}{n}$ n'a pas de limite, car $\sin n$ oscille. » A-t-il raison ? Justifier.
- c) Inès affirme : « Pour tout entier naturel n , $1,1^n \geq 1 + 0,1n$. » Démontrer cette affirmation par récurrence, puis en déduire la limite de $(1,1^n)$ sans utiliser le cours sur les suites géométriques.
- d) Tom affirme : « Une suite croissante tend toujours vers $+\infty$. » A-t-il raison ? Justifier.

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).