

Corrigé et barème – Raisonnement par récurrence et limites de suites — niveau ★

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Exercice 1 – Automatismes

(5 pts)

- a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0$, et par somme $\lim u_n = 3$. (1 pt) (1)
- b) Forme indéterminée « $+\infty - \infty$ » : on factorise $v_n = n^2 \left(1 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$. La parenthèse tend vers 1 et $n^2 \rightarrow +\infty$, donc par produit $\lim v_n = +\infty$. (1 pt) (1)
- c) $-1 < 0,8 < 1$ donc $\lim 0,8^n = 0$; par produit et somme, $\lim w_n = 7 \times 0 - 1 = -1$. (1 pt) (1)
- d) Forme « $\frac{\infty}{\infty}$ » : pour $n \geq 2$, $t_n = \frac{n \left(4 + \frac{1}{n}\right)}{n \left(2 - \frac{2}{n}\right)} = \frac{4 + \frac{1}{n}}{2 - \frac{2}{n}}$. Le numérateur tend vers 4, le dénominateur vers 2, donc $\lim t_n = 2$. (1 pt) (1)
- e) $1,5 > 1$ donc $\lim 1,5^n = +\infty$; en multipliant par $-2 < 0$, $\lim s_n = -\infty$. (1 pt) (1)

Méthode — Devant une forme indéterminée avec des puissances de n , on factorise par le terme de plus haut degré : au numérateur et au dénominateur pour un quotient, dans toute l'expression pour une somme.

Exercice 2 – Formule explicite et limite

(5 pts)

- a) $u_1 = 2 \times 8 - 5 = 11$ et $u_2 = 2 \times 11 - 5 = 17$. (1 pt) (1,25)
- b) Soit $P(n)$: « $u_n = 3 \times 2^n + 5$ ».
Initialisation : $3 \times 2^0 + 5 = 8 = u_0$, donc $P(0)$ est vraie.
Hérédité : soit n un entier naturel tel que $P(n)$ est vraie. Alors $u_{n+1} = 2u_n - 5 = 2(3 \times 2^n + 5) - 5 = 3 \times 2^{n+1} + 10 - 5 = 3 \times 2^{n+1} + 5$, donc $P(n+1)$ est vraie.
Conclusion : $P(0)$ est vraie et P est héréditaire, donc pour tout entier naturel n , $u_n = 3 \times 2^n + 5$.
(2 pts : 0,5 pour l'initialisation, 1 pour l'hérédité, 0,5 pour la conclusion) (1,25)
- c) $u_{n+1} - u_n = 3 \times 2^{n+1} + 5 - 3 \times 2^n - 5 = 3 \times 2^n(2 - 1) = 3 \times 2^n$. Ce nombre est strictement positif, donc (u_n) est strictement croissante. (1 pt) (1,25)
- d) $2 > 1$ donc $\lim 2^n = +\infty$; par produit par $3 > 0$ puis somme, $\lim u_n = +\infty$. (1 pt) (1,25)

Erreur fréquente — Dans l'hérédité, on part de u_{n+1} et on utilise la relation de récurrence puis l'hypothèse $P(n)$: écrire directement la formule au rang $n+1$ revient à supposer ce qu'on veut démontrer.

Exercice 3 – Majorer puis converger

(5 pts)

a) $v_1 = \frac{1}{2} \times 1 + 3 = 3,5$ et $v_2 = \frac{1}{2} \times 3,5 + 3 = 4,75$. (1 pt) (1,25)

b) Soit $P(n) : \ll v_n \leq 6 \gg$.

Initialisation : $v_0 = 1 \leq 6$.

Hérédité : si $v_n \leq 6$ pour un entier n , alors $\frac{1}{2}v_n \leq 3$ (multiplication par $\frac{1}{2} > 0$), puis $\frac{1}{2}v_n + 3 \leq 6$, c'est-à-dire $v_{n+1} \leq 6$.

Conclusion : pour tout entier naturel n , $v_n \leq 6$. (1,5 pt) (1,25)

c) $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2}v_n + 3 - v_n = 3 - \frac{1}{2}v_n = \frac{6 - v_n}{2}$. D'après b), $6 - v_n \geq 0$, donc $v_{n+1} - v_n \geq 0$: la suite (v_n) est croissante. (1,5 pt) (1,25)

d) (v_n) est croissante et majorée par 6, donc elle converge (théorème de convergence monotone). Alors $\ell = \frac{1}{2}\ell + 3 \iff \frac{1}{2}\ell = 3 \iff \ell = 6$. (1 pt) (1,25)

Piège — Être majorée par 6 ne suffit pas à dire que la limite vaut 6 : le majorant sert à prouver la convergence, c'est l'équation $\ell = \frac{1}{2}\ell + 3$ qui donne la valeur.

Exercice 4 – Qui a raison ?

(5 pts)

a) Oui. Comme $(-1)^n \geq -1$, on a $a_n \geq n - 1$ pour tout n ; or $\lim(n - 1) = +\infty$, donc par comparaison $\lim a_n = +\infty$. (1 pt) (1,25)

b) Non. Pour $n \geq 1$, $-1 \leq \sin n \leq 1$ donc $-\frac{1}{n} \leq b_n \leq \frac{1}{n}$. Les deux suites qui encadrent tendent vers 0, donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim b_n = 0$. (1,5 pt) (1,25)

c) **Initialisation** : $1,1^0 = 1 \geq 1 + 0 = 1$.

Hérédité : si $1,1^n \geq 1 + 0,1n$, en multipliant par $1,1 > 0$: $1,1^{n+1} \geq 1,1(1 + 0,1n) = 1,1 + 0,11n = 1 + 0,1(n + 1) + 0,01n \geq 1 + 0,1(n + 1)$ car $0,01n \geq 0$.

Conclusion : l'inégalité est vraie pour tout n . Comme $\lim(1 + 0,1n) = +\infty$, par comparaison $\lim 1,1^n = +\infty$. (1,5 pt) (1,25)

d) Non. La suite (v_n) de l'exercice 3 est croissante mais converge vers 6 ; autre exemple : $c_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ est croissante et tend vers 1. Une suite croissante tend vers $+\infty$ seulement si elle n'est pas majorée. (1 pt) (1,25)

Astuce — Pour réfuter une affirmation générale, un seul contre-exemple suffit ; pour la prouver, il faut un argument valable dans tous les cas.