

Devoir surveillé – Primitives, calcul intégral et équations différentielles — niveau ★★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Nom : _____

Date : _____

Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Automatismes

(4 pts)

- a) Déterminer une primitive sur $]0; +\infty[$ de $f(x) = \frac{(\ln x)^3}{x}$.
- b) Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $g(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$.
- c) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x \, dx$.
- d) Calculer $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 2} \, dx$.

Exercice 2 – Démontrer

(4 pts)

- a) Soit f continue sur $\mathbb{R}$, y_0 un réel et $F(x) = \int_0^x f(t) \, dt$. Démontrer que l'équation $y' = f$ admet une unique solution G sur $\mathbb{R}$ telle que $G(0) = y_0$, et l'exprimer à l'aide de F .
- b) Soit a un réel. Démontrer que les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y' = ay$ sont exactement les fonctions $x \mapsto Ce^{ax}$, $C \in \mathbb{R}$. On pourra considérer $x \mapsto y(x)e^{-ax}$.
- c) Soit φ continue sur $\mathbb{R}$ et p une solution de $(E) : y' = ay + \varphi(x)$. Démontrer que les solutions de (E) sont les fonctions $x \mapsto p(x) + Ce^{ax}$, puis qu'il en existe une seule prenant une valeur y_1 donnée en un réel x_1 donné.

Exercice 3 – Problème — Une courbe définie par une équation différentielle

(5 pts)

On considère l'équation $(E) : y' = -y + 2xe^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

a) Soit P une fonction polynôme et $u(x) = P(x)e^{-x}$. Montrer que u est solution de (E) si et seulement si $P'(x) = 2x$ pour tout x , et en déduire une solution particulière de (E) .

- a) Résoudre (E) .
- b) Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = -1$.
- c) Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$, puis ses variations.
- d) Sans chercher de primitive de f , mais en utilisant (E) , calculer l'aire du domaine limité par la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$.

Exercice 4 – Suite d'intégrales et approximation de $\ln 2$ **(4 pts)**

Pour tout entier naturel n , on pose $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

a) Calculer J_0 et J_1 .

a) Montrer que, pour tout entier naturel n , $J_n + J_{n+1} = \frac{1}{n+1}$.

b) Montrer que, pour tout n , $0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$, puis déterminer la limite de (J_n) .

c) On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1}$ pour $n \geq 1$. Démontrer par récurrence que $\ln 2 = S_n + (-1)^n J_n$, en déduire la limite de (S_n) et une valeur de n pour laquelle S_n approche $\ln 2$ à 10^{-2} près.

Exercice 5 – Pour aller plus loin**(3 pts)**

On cherche les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout réel x , $f(x) = x + \int_0^x f(t) dt$.

a) Montrer qu'une telle fonction est dérivable, que $f(0) = 0$ et que f est solution de $y' = y + 1$.

a) En déduire f , puis vérifier que la fonction obtenue convient.

b) Généraliser : pour un réel $a \neq 0$, déterminer toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que $f(x) = x + a \int_0^x f(t) dt$ pour tout réel x .

Bon courage !