

Corrigé et barème – Primitives, calcul intégral et équations différentielles — niveau ★★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Exercice 1 – Automatismes

(4 pts)

- a) Avec $u(x) = \ln x$, $u'(x) = \frac{1}{x}$: $f = u'u^3$, d'où $F(x) = \frac{(\ln x)^4}{4}$. (1 pt) (1)
- b) Avec $u(x) = e^x + 1 > 0$, $u'(x) = e^x$: $g = \frac{u'}{u^2}$, d'où $G(x) = -\frac{1}{e^x + 1}$. (1 pt) (1)
- c) Avec $u = \cos$, $u' = -\sin$: $\sin x \cos^2 x = -u'u^2$, primitive $-\frac{\cos^3 x}{3}$. L'intégrale vaut $\left[-\frac{\cos^3 x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$. (1 pt) (1)
- d) Forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = e^x + 2 > 0$: $[\ln(e^x + 2)]_0^1 = \ln(e + 2) - \ln 3 = \ln \frac{e + 2}{3}$. (1 pt) (1)

Piège — Pour $\sin x \cos^2 x$, la dérivée de $\cos$ est $-\sin$: oublier ce signe moins donne une intégrale négative alors que la fonction est positive sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 2 – Démontrer

(4 pts)

- a) f est continue, donc F est dérivable avec $F' = f$ et $F(0) = 0$ (0,5 pt). Existence : $G = y_0 + F$ vérifie $G' = f$ et $G(0) = y_0$. Unicité : si H convient aussi, $(H - F)' = f - f = 0$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$, donc $H - F$ est constante, égale à $H(0) - F(0) = y_0$; ainsi $H = y_0 + F$ (1 pt). (1,33333)
- b) Réciproque : $(Ce^{ax})' = aCe^{ax}$, donc ces fonctions sont solutions (0,5 pt). Si $y' = ay$, posons $g(x) = y(x)e^{-ax}$: $g'(x) = y'(x)e^{-ax} - ay(x)e^{-ax} = (ay - ay)e^{-ax} = 0$, donc g est constante égale à C et $y(x) = Ce^{ax}$ (1 pt). (1,33333)
- c) $y' = ay + \varphi \iff y' - p' = a(y - p)$ puisque $p' = ap + \varphi$; d'après b), $y - p = Ce^{ax}$ (0,5 pt). La condition $p(x_1) + Ce^{ax_1} = y_1$ équivaut à $C = (y_1 - p(x_1))e^{-ax_1}$: une seule valeur de C , donc une seule solution (0,5 pt). (1,33333)

Méthode — Les trois démonstrations reposent sur le même outil : une fonction de dérivée nulle sur un intervalle est constante. C'est lui qui donne l'unicité.

Exercice 3 – Problème — Une courbe définie par une équation différentielle

(5 pts)

- a) $u'(x) = P'(x)e^{-x} - P(x)e^{-x}$, donc $u' + u = P'(x)e^{-x}$ (0,5 pt). u est solution $\iff P'(x)e^{-x} = 2xe^{-x} \iff P'(x) = 2x$ (car $e^{-x} \neq 0$). $P(x) = x^2$ convient : $x \mapsto x^2e^{-x}$ est solution particulière (0,5 pt). (1)
- b) y solution de (E) $\iff y - x^2e^{-x}$ solution de $y' = -y$ (même raisonnement qu'au cours) : les solutions sont $y(x) = (x^2 + C)e^{-x}$, $C \in \mathbb{R}$. (1 pt) (1)
- c) $f(0) = C = -1$: $f(x) = (x^2 - 1)e^{-x}$. (0,5 pt) (1)
- d) En $-\infty$: $x^2 - 1 \rightarrow +\infty$ et $e^{-x} \rightarrow +\infty$, donc $f \rightarrow +\infty$. En $+\infty$: $x^2e^{-x} \rightarrow 0$ (croissances comparées) et $e^{-x} \rightarrow 0$, donc $f \rightarrow 0$ (0,5 pt). $f'(x) = 2xe^{-x} - (x^2 - 1)e^{-x} = (-x^2 + 2x + 1)e^{-x}$; $\Delta = 8$, racines $1 \pm \sqrt{2}$ (0,5 pt). f décroît sur $] -\infty; 1 - \sqrt{2}]$, croît sur $[1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}]$, décroît sur $[1 + \sqrt{2}; +\infty[$; minimum local $f(1 - \sqrt{2}) = (2 - 2\sqrt{2})e^{\sqrt{2}-1} \approx -1,25$, maximum local $f(1 + \sqrt{2}) = (2 + 2\sqrt{2})e^{-1-\sqrt{2}} \approx 0,43$ (0,5 pt). (1)
- e) Sur $[-1; 1]$, $x^2 - 1 \leq 0$ donc $f \leq 0$: l'aire vaut $-\int_{-1}^1 f(x) dx$. D'après (E), $f = 2xe^{-x} - f'$, donc
$$\int_{-1}^1 f = \int_{-1}^1 2xe^{-x} dx - (f(1) - f(-1)) = \int_{-1}^1 2xe^{-x} dx \text{ car } f(1) = f(-1) = 0 \text{ (0,5 pt).}$$
 Par parties ($u = 2x$, $v' = e^{-x}$, $v = -e^{-x}$) : $[-2xe^{-x}]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 2e^{-x} dx = \left(-\frac{2}{e} - 2e\right) + \left(-\frac{2}{e} + 2e\right) = -\frac{4}{e}$. Aire $= \frac{4}{e} \approx 1,47$ u.a. (0,5 pt). (1)

Astuce — Une équation différentielle exprime f à l'aide de f' : intégrer cette relation fait apparaître $f(b) - f(a)$ et évite de chercher directement une primitive de f .

Exercice 4 – Suite d'intégrales et approximation de $\ln 2$

(4 pts)

- a) $J_0 = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2$ (forme $\frac{u'}{u}$, $1+x > 0$) (0,5 pt). $\frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$, donc $J_1 = [x - \ln(1+x)]_0^1 = 1 - \ln 2$ (0,5 pt). (1)
- b) Par linéarité, $J_n + J_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1+x} dx = \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$. (1 pt) (1)
- c) Pour $x \in [0; 1]$, $1+x \geq 1$ donc $0 \leq \frac{x^n}{1+x} \leq x^n$; par positivité et comparaison ($0 \leq 1$), $0 \leq J_n \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$ (0,5 pt). Par le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$ (0,5 pt). (1)
- d) Initialisation ($n = 1$) : $S_1 = 1$ et $1 - J_1 = \ln 2 = J_0$. Hérédité : si $\ln 2 = S_n + (-1)^n J_n$, comme $J_n = \frac{1}{n+1} - J_{n+1}$, on obtient $\ln 2 = S_n + \frac{(-1)^n}{n+1} + (-1)^{n+1} J_{n+1} = S_{n+1} + (-1)^{n+1} J_{n+1}$ (0,5 pt). Donc $|\ln 2 - S_n| = J_n \leq \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$: $\lim S_n = \ln 2$; $\frac{1}{n+1} \leq 10^{-2}$ dès $n = 99$, donc S_{99} convient (0,5 pt). (1)

Erreur fréquente — Encadrer l'intégrande ne suffit pas : il faut citer la comparaison des intégrales et vérifier que les bornes sont dans l'ordre croissant.

Exercice 5 – Pour aller plus loin**(3 pts)**

- a) f continue, donc $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ est dérivable de dérivée f ; ainsi f est dérivable et $f'(x) = 1 + f(x)$ (0,5 pt). En $x = 0$: $f(0) = 0 + \int_0^0 f = 0$ (0,5 pt). (1)
- b) Solutions de $y' = y + 1$: $y(x) = Ce^x - 1$; $f(0) = C - 1 = 0$ donne $f(x) = e^x - 1$ (0,5 pt).
Réciproque : $x + \int_0^x (e^t - 1) dt = x + (e^x - 1 - x) = e^x - 1$: elle convient, c'est l'unique solution (0,5 pt). (1)
- c) Même raisonnement : $f' = 1 + af$ et $f(0) = 0$, donc $f(x) = Ce^{ax} - \frac{1}{a}$ avec $C = \frac{1}{a}$, soit $f(x) = \frac{e^{ax} - 1}{a}$ (0,5 pt). Réciproque : $x + a \int_0^x \frac{e^{at} - 1}{a} dt = x + \left[\frac{e^{at}}{a} - t \right]_0^x = x + \frac{e^{ax} - 1}{a} - x = \frac{e^{ax} - 1}{a}$ (0,5 pt). (1)

Piège — Une équation « intégrale » cache toujours une condition initiale : on l'obtient en remplaçant x par la borne inférieure, où l'intégrale est nulle.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).