

Devoir surveillé – Primitives, calcul intégral et équations différentielles — niveau ★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Nom : _____

Date : _____

Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Automatismes

(4 pts)

- a) Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f(x) = xe^{x^2}$.
- b) Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $g(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)^2}$.
- c) Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $h(x) = \cos(3x) - 4 \sin x$.
- d) Calculer $\int_0^{\ln 3} e^{-x} dx$.

Exercice 2 – Problème — Une perfusion

(5 pts)

Un patient reçoit un médicament par perfusion. On note $Q(t)$ la quantité de médicament, en mg, présente dans son sang à l'instant t , en heures. On admet que $Q(0) = 0$ et que, pour tout $t \geq 0$, $Q'(t) = -0,2 Q(t) + 4$.

- a) Déterminer la solution constante de l'équation $y' = -0,2y + 4$, puis toutes ses solutions sur $[0; +\infty[$.
 - a) En déduire que, pour tout $t \geq 0$, $Q(t) = 20(1 - e^{-0,2t})$.
 - b) Étudier le sens de variation de Q et sa limite en $+\infty$. Interpréter.
 - c) Déterminer à partir de quel instant la quantité de médicament atteint 15 mg (valeur exacte, puis arrondi à la minute).
 - d) Calculer la quantité moyenne de médicament dans le sang pendant les 10 premières heures (valeur exacte, puis arrondi au centième de mg).

Exercice 3 – Une équation à second membre exponentiel

(4 pts)

On considère l'équation différentielle $(E) : y' = y - e^{2x}$ sur $\mathbb{R}$.

- a) Vérifier que la fonction g définie par $g(x) = -e^{2x}$ est solution de (E) .
 - a) Démontrer qu'une fonction h dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si $h - g$ est solution de $y' = y$, puis donner toutes les solutions de (E) .
 - b) Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 0$.
 - c) Étudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.
 - d) Calculer l'aire, en unités d'aire, du domaine limité par la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -\ln 2$ et $x = 0$.

Exercice 4 – Fonction définie par une intégrale**(4 pts)**

Pour $x > 0$, on pose $F(x) = \int_1^x t \ln t \, dt$.

a) Justifier que F est dérivable sur $]0; +\infty[$, calculer $F'(x)$ et en déduire les variations de F ainsi que son signe.

a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $F(x) = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2 - 1}{4}$.

b) En déduire la valeur exacte de $F(e)$.

c) Calculer la valeur moyenne de $t \mapsto t \ln t$ sur $[1; e]$ (valeur exacte, puis arrondi au centième).

Exercice 5 – Qui a raison ?**(3 pts)**

Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse, en justifiant.

a) « La fonction $x \mapsto \ln(x^2 + 1)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \frac{2x}{x^2 + 1}$. »

a) « Si f est continue sur $[0; 2]$ et si $f(x) \leq 3$ pour tout $x \in [0; 2]$, alors $\int_0^2 f(x) \, dx \leq 6$. »

b) « La solution de $y' = 2y + 2$ qui vaut 0 en 0 est positive sur $\mathbb{R}$. »

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).