

Corrigé et barème – Primitives, calcul intégral et équations différentielles — niveau ★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Exercice 1 – Automatismes

(4 pts)

- a) Avec $u(x) = x^2$, $u'(x) = 2x$: $f = \frac{1}{2}u'e^u$, d'où $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$. (1 pt) (1)
- b) Avec $u(x) = x^2 + 1 > 0$, $u'(x) = 2x$: $g = \frac{1}{2} \cdot \frac{u'}{u^2}$ et une primitive de $\frac{u'}{u^2}$ est $-\frac{1}{u}$, d'où $G(x) = -\frac{1}{2(x^2 + 1)}$. (1 pt) (1)
- c) Une primitive de $\cos(3x)$ est $\frac{1}{3}\sin(3x)$, une primitive de $-4\sin x$ est $4\cos x$: $H(x) = \frac{1}{3}\sin(3x) + 4\cos x$. (1 pt) (1)
- d) $\int_0^{\ln 3} e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^{\ln 3} = -e^{-\ln 3} + 1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. (1 pt) (1)

Méthode — Face à un quotient ou un produit, on cherche d'abord la fonction u dont la dérivée apparaît en facteur : il ne reste qu'à ajuster la constante multiplicative.

Exercice 2 – Problème — Une perfusion

(5 pts)

- a) Solution constante : $0 = -0,2y + 4 \iff y = 20$ (0,5 pt). Solutions : $y(t) = Ce^{-0,2t} + 20$, $C \in \mathbb{R}$ (0,5 pt). (1)
- b) Q est l'une de ces solutions : $Q(t) = Ce^{-0,2t} + 20$. $Q(0) = C + 20 = 0 \iff C = -20$, d'où $Q(t) = 20 - 20e^{-0,2t} = 20(1 - e^{-0,2t})$. (1 pt) (1)
- c) $Q'(t) = -20 \times (-0,2)e^{-0,2t} = 4e^{-0,2t} > 0$: Q est strictement croissante (0,5 pt). $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,2t} = 0$, donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} Q(t) = 20$: la quantité augmente et se stabilise vers 20 mg (0,5 pt). (1)
- d) $Q(t) \geq 15 \iff 1 - e^{-0,2t} \geq 0,75 \iff e^{-0,2t} \leq \frac{1}{4} \iff -0,2t \leq -\ln 4 \iff t \geq 5 \ln 4$ (0,5 pt). $5 \ln 4 \approx 6,931$ h et $0,931 \times 60 \approx 56$: environ 6 h 56 min (0,5 pt). (1)
- e) $\mu = \frac{1}{10} \int_0^{10} (20 - 20e^{-0,2t}) dt$; une primitive est $20t + 100e^{-0,2t}$ (0,5 pt). $\mu = \frac{1}{10} [(200 + 100e^{-2}) - 100] = 10 + 10e^{-2} \approx 11,35$ mg (0,5 pt). (1)

Piège — En passant au logarithme dans $-0,2t \leq -\ln 4$, diviser par $-0,2$ renverse l'inégalité : un sens oublié donne un résultat absurde ($t \leq \dots$).

Exercice 3 – Une équation à second membre exponentiel

(4 pts)

- a) $g'(x) = -2e^{2x}$ et $g(x) - e^{2x} = -e^{2x} - e^{2x} = -2e^{2x}$: on a bien $g' = g - e^{2x}$. (0,5 pt) (0,8)
- b) Comme $g' = g - e^{2x}$: $h' = h - e^{2x} \iff h' - g' = (h - e^{2x}) - (g - e^{2x}) \iff (h - g)' = h - g$ (0,5 pt). Donc $h - g = Ce^x$, et les solutions de (E) sont $h(x) = Ce^x - e^{2x}$, $C \in \mathbb{R}$ (0,5 pt). (0,8)
- c) $f(0) = C - 1 = 0 \iff C = 1$: $f(x) = e^x - e^{2x}$. (1 pt) (0,8)
- d) $f(x) = e^x(1 - e^x)$ avec $e^x > 0$; $1 - e^x \geq 0 \iff x \leq 0$. Donc $f \geq 0$ sur $] -\infty; 0]$ et $f < 0$ sur $]0; +\infty[$. (0,5 pt) (0,8)
- e) f est continue et positive sur $[-\ln 2; 0]$; une primitive est $F(x) = e^x - \frac{1}{2}e^{2x}$ (0,5 pt). $F(0) = \frac{1}{2}$ et $F(-\ln 2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$, donc l'aire vaut $\frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{1}{8}$ u.a. (0,5 pt). (0,8)

Astuce — Les solutions de $y' = ay + f(x)$ s'écrivent toujours « solution particulière + Ce^{ax} » : toute la difficulté est de trouver une solution particulière.

Exercice 4 – Fonction définie par une intégrale

(4 pts)

- a) $t \mapsto t \ln t$ est continue sur $]0; +\infty[$, qui contient 1 : F est la primitive de cette fonction qui s'annule en 1, donc $F'(x) = x \ln x$ (0,5 pt). $F'(x) < 0$ sur $]0; 1[$, $F'(x) > 0$ sur $]1; +\infty[$: F décroît puis croît, de minimum $F(1) = 0$, donc $F(x) \geq 0$ pour tout $x > 0$ (0,5 pt). (1)
- b) On pose $u(t) = \ln t$, $v'(t) = t$, d'où $u'(t) = \frac{1}{t}$, $v(t) = \frac{t^2}{2}$ (0,5 pt). $F(x) = \left[\frac{t^2}{2} \ln t \right]_1^x - \int_1^x \frac{t}{2} dt = \frac{x^2 \ln x}{2} - \left[\frac{t^2}{4} \right]_1^x = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2 - 1}{4}$ (1 pt). (1)
- c) $F(e) = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2 - 1}{4} = \frac{2e^2 - e^2 + 1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}$. (0,5 pt) (1)
- d) $\mu = \frac{1}{e-1} \int_1^e t \ln t dt = \frac{F(e)}{e-1} = \frac{e^2 + 1}{4(e-1)}$ (0,5 pt) $\approx \frac{8,389}{6,873} \approx 1,22$ (0,5 pt). (1)

Erreur fréquente — Pour intégrer $t \ln t$ par parties, prendre $u = t$ oblige à primitiver $\ln t$: c'est $\ln t$ qu'il faut dériver, car sa dérivée $\frac{1}{t}$ simplifie tout.

Exercice 5 – Qui a raison ?

(3 pts)

- a) Vrai : $x^2 + 1 > 0$ sur $\mathbb{R}$, donc $x \mapsto \ln(x^2 + 1)$ est dérivable, de dérivée $\frac{2x}{x^2 + 1}$ (forme $\frac{u'}{u}$). (1 pt) (1)
- b) Vrai : par comparaison ($0 \leq 2$ et $f \leq 3$ sur $[0; 2]$), $\int_0^2 f(x) dx \leq \int_0^2 3 dx = 3 \times 2 = 6$. (1 pt) (1)
- c) Faux : les solutions sont $y(x) = Ce^{2x} - 1$; $y(0) = C - 1 = 0$ donne $y(x) = e^{2x} - 1$ (0,5 pt). Pour $x = -1$, $y(-1) = e^{-2} - 1 < 0$: contre-exemple (0,5 pt). (1)

Méthode — Pour prouver qu'une affirmation générale est fausse, une seule valeur bien choisie suffit ; pour prouver qu'elle est vraie, il faut un argument valable dans tous les cas.