

## Devoir surveillé – Primitives, calcul intégral et équations différentielles — niveau ★

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Nom : \_\_\_\_\_

Date : \_\_\_\_\_

Note : \_\_\_\_\_ / 20

*Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.*

---

### Exercice 1 – Automatismes

(5 pts)

- a) Déterminer une primitive sur  $\mathbb{R}$  de  $f(x) = 3x^2 - 8x + 5$ .
- b) Déterminer une primitive sur  $\mathbb{R}$  de  $g(x) = 6e^{3x}$ .
- c) Déterminer une primitive sur  $]1; +\infty[$  de  $h(x) = \frac{2}{x-1}$ .
- d) Calculer  $\int_0^2 (3x^2 - 2x + 1) dx$ .
- e) Calculer  $\int_1^e \frac{4}{x} dx$ .

### Exercice 2 – Équations différentielles et intégrale

(5 pts)

- a) Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle  $y' = -2y$ .
- b) Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle  $y' = 3y + 6$ .
- c) Déterminer la solution de  $y' = 3y + 6$  qui vaut 1 en 0.
- d) Déterminer la fonction  $F$  définie sur  $\mathbb{R}$  telle que  $F'(x) = 2x + \cos x$  et  $F(0) = 3$ .
- e) Soit  $f$  la solution de  $y' = -2y$  telle que  $f(0) = 4$ . Calculer  $\int_0^1 f(x) dx$ .

### Exercice 3 – Aire et valeur moyenne

(5 pts)

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; 6]$  par  $f(x) = -x^2 + 6x$ , de courbe  $\mathcal{C}_f$  dans un repère orthogonal.

- a) Étudier le signe de  $f(x)$  sur  $[0; 6]$ .
  - a) Déterminer une primitive  $F$  de  $f$  sur  $[0; 6]$ .
  - b) Calculer l'aire, en unités d'aire, du domaine limité par  $\mathcal{C}_f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = 6$ .
  - c) Calculer la valeur moyenne  $\mu$  de  $f$  sur  $[0; 6]$ .
  - d) Déterminer les réels  $c$  de  $[0; 6]$  tels que  $f(c) = \mu$ .

**Exercice 4 – Intégration par parties et propriétés***(5 pts)*

- a) À l'aide d'une intégration par parties, calculer  $\int_0^1 x e^x dx$ .
- b) En déduire, par linéarité, la valeur de  $\int_0^1 (2x + 3) e^x dx$ .
- c) Vérifier que  $G(x) = x \ln x - x$  est une primitive de  $\ln x$  sur  $]0; +\infty[$ , puis calculer  $\int_1^e \ln x dx$ . Le signe du résultat était-il prévisible ?
- d) Une fonction  $g$  continue sur  $\mathbb{R}$  vérifie  $\int_0^3 g(x) dx = 5$  et  $\int_0^1 g(x) dx = 2$ . Calculer  $\int_1^3 g(x) dx$  et  $\int_3^1 g(x) dx$ .

*Bon courage !*

---

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).