

Corrigé et barème – Primitives, calcul intégral et équations différentielles — niveau ★

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Exercice 1 – Automatismes

(5 pts)

- a) Primitive terme à terme : $F(x) = 3 \times \frac{x^3}{3} - 8 \times \frac{x^2}{2} + 5x = x^3 - 4x^2 + 5x$. Contrôle : $F'(x) = 3x^2 - 8x + 5$. (1 pt) (1)
- b) e^{3x} a pour dérivée $3e^{3x}$, donc $6e^{3x} = 2 \times 3e^{3x}$ admet pour primitive $G(x) = 2e^{3x}$. (1 pt) (1)
- c) Sur $]1; +\infty[$, $u(x) = x - 1 > 0$ et $u'(x) = 1$: $h = 2\frac{u'}{u}$, d'où $H(x) = 2\ln(x - 1)$. (1 pt) (1)
- d) Une primitive est $x^3 - x^2 + x$; $\int_0^2 (3x^2 - 2x + 1) dx = [x^3 - x^2 + x]_0^2 = (8 - 4 + 2) - 0 = 6$. (1 pt) (1)
- e) $\int_1^e \frac{4}{x} dx = [4\ln x]_1^e = 4\ln e - 4\ln 1 = 4 - 0 = 4$. (1 pt) (1)

Méthode — Après avoir trouvé une primitive, on la dérive de tête : ce contrôle de quelques secondes repère presque toutes les erreurs de coefficient.

Exercice 2 – Équations différentielles et intégrale

(5 pts)

- a) Les solutions de $y' = ay$ sont les fonctions $x \mapsto Ce^{ax}$; ici $a = -2$: $y(x) = Ce^{-2x}$, $C \in \mathbb{R}$. (1 pt) (1)
- b) Solution constante : $0 = 3y + 6 \iff y = -2$. Les solutions sont $y(x) = Ce^{3x} - 2$, $C \in \mathbb{R}$. (1 pt) (1)
- c) $y(0) = C - 2 = 1 \iff C = 3$: la solution cherchée est $y(x) = 3e^{3x} - 2$. (1 pt) (1)
- d) Les primitives de $2x + \cos x$ sont $F(x) = x^2 + \sin x + k$; $F(0) = 0 + 0 + k = 3$ donc $k = 3$ et $F(x) = x^2 + \sin x + 3$. (1 pt) (1)
- e) D'après a), $f(x) = Ce^{-2x}$ avec $f(0) = C = 4$, donc $f(x) = 4e^{-2x}$ (0,5 pt). Une primitive est $-2e^{-2x}$, d'où $\int_0^1 4e^{-2x} dx = [-2e^{-2x}]_0^1 = -2e^{-2} + 2 = 2 - 2e^{-2}$ (0,5 pt). (1)

Piège — Pour $y' = ay + b$, la solution constante est $-\frac{b}{a}$ et non $\frac{b}{a}$: on la retrouve en résolvant $0 = ay + b$ plutôt qu'en l'apprenant par cœur.

Exercice 3 – Aire et valeur moyenne

(5 pts)

- a) $f(x) = x(6 - x)$. Sur $[0; 6]$, $x \geq 0$ et $6 - x \geq 0$, donc $f(x) \geq 0$ (nul en 0 et en 6). (1 pt) (1)
- b) $F(x) = -\frac{x^3}{3} + 3x^2$; contrôle : $F'(x) = -x^2 + 6x = f(x)$. (0,5 pt) (1)
- c) f est continue et positive sur $[0; 6]$, donc l'aire vaut $\int_0^6 f(x) dx = F(6) - F(0)$ (0,5 pt) $= -\frac{216}{3} + 108 - 0 = -72 + 108 = 36$ u.a. (1 pt) (1)
- d) $\mu = \frac{1}{6-0} \int_0^6 f(x) dx = \frac{36}{6} = 6$. (1 pt) (1)
- e) $f(c) = 6 \iff -c^2 + 6c = 6 \iff c^2 - 6c + 6 = 0$; $\Delta = 36 - 24 = 12$, $c = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 3 \pm \sqrt{3}$ (0,5 pt). Comme $\sqrt{3} \approx 1,73$, les deux valeurs $3 - \sqrt{3}$ et $3 + \sqrt{3}$ sont dans $[0; 6]$ (0,5 pt). (1)

Erreur fréquente — L'intégrale n'est une aire que si la fonction est positive : on justifie toujours le signe avant d'écrire « aire = intégrale ».

Exercice 4 – Intégration par parties et propriétés

(5 pts)

- a) On pose $u(x) = x$, $v'(x) = e^x$, donc $u'(x) = 1$, $v(x) = e^x$, fonctions dérivables à dérivées continues (0,5 pt). $\int_0^1 x e^x dx = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - [e^x]_0^1 = e - (e - 1) = 1$ (1 pt). (1,25)
- b) $\int_0^1 (2x + 3) e^x dx = 2 \int_0^1 x e^x dx + 3 \int_0^1 e^x dx = 2 \times 1 + 3(e - 1) = 3e - 1$. (1 pt) (1,25)
- c) $G'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x$ (0,5 pt). $\int_1^e \ln x dx = G(e) - G(1) = (e - e) - (0 - 1) = 1$. Prévisible : $\ln x \geq 0$ sur $[1; e]$ et $1 \leq e$, donc l'intégrale est positive (0,5 pt). (1,25)
- d) Relation de Chasles : $\int_0^3 g = \int_0^1 g + \int_1^3 g$, donc $\int_1^3 g(x) dx = 5 - 2 = 3$ (1 pt). Échanger les bornes change le signe : $\int_3^1 g(x) dx = -3$ (0,5 pt). (1,25)

Astuce — Dans une intégration par parties, on choisit pour u le facteur qui se simplifie en le dérivant (ici x) et pour v' celui qui se primitive facilement (ici e^x).