

Devoir surveillé – Limites de fonctions, continuité et théorème des valeurs intermédiaires — niveau ★★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Nom : _____

Date : _____

Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Automatismes

(3 pts)

- a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$.
- b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} - x^5 e^x)$.
- c) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right)$.

Exercice 2 – Démontrer — Croissances comparées

(5 pts)

- a) Soit h la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $h(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$. Démontrer que, pour tout $x \geq 0$, $e^x - x > 0$, puis que $h(x) > 0$.
- b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$.
- c) En déduire, à l'aide d'un changement de variable, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x$.
- d) Soit n un entier naturel non nul. Vérifier que, pour $x > 0$, $\frac{e^x}{x^n} = \frac{1}{n^n} \left(\frac{e^{x/n}}{x/n} \right)^n$, et en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n}$.
- e) Démontrer que l'équation $e^x = 10x^2$ admet au moins une solution dans $[1; +\infty[$.

Exercice 3 – Pour aller plus loin — Points fixes et cordes

(4 pts)

- a) Soit f une fonction continue sur $[0; 1]$ telle que $0 \leq f(x) \leq 1$ pour tout $x \in [0; 1]$. Démontrer que f admet un point fixe, c'est-à-dire un réel $c \in [0; 1]$ tel que $f(c) = c$.
- b) À l'aide de la fonction $x \mapsto \frac{1+x}{2}$, montrer que ce résultat tombe en défaut si l'on remplace $[0; 1]$ par $[0; 1[$ (dans l'hypothèse comme dans la conclusion).
- c) Soit f une fonction continue sur $[0; 1]$ telle que $f(0) = f(1)$. En étudiant $g(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right) - f(x)$ sur $[0; \frac{1}{2}]$, démontrer qu'il existe $c \in [0; \frac{1}{2}]$ tel que $f\left(c + \frac{1}{2}\right) = f(c)$. Interpréter ce résultat pour un randonneur qui parcourt un sentier en boucle, partant et arrivant au même point.
- d) Soit f une fonction continue sur $[0; +\infty[$ telle que $f(0) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Démontrer que f admet un point fixe.

Exercice 4 – Une suite définie par des équations**(4 pts)**

- a) Pour tout entier $n \geq 1$, on note f_n la fonction définie sur $[0; 1]$ par $f_n(x) = x^n + 3x - 3$. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution, notée a_n , dans $[0; 1]$, et que $0 < a_n < 1$.
- b) Calculer les valeurs exactes de a_1 et de a_2 .
- c) Montrer que $f_{n+1}(a_n) = a_n^n(a_n - 1)$, puis en déduire que la suite (a_n) est strictement croissante.
- d) Justifier que la suite (a_n) converge vers un réel ℓ tel que $0 < \ell \leq 1$.
- e) Démontrer que $\ell = 1$ (on pourra raisonner par l'absurde et exprimer a_n^n en fonction de a_n).

Exercice 5 – Problème — Combien de solutions ?**(4 pts)**

Soit k un réel strictement positif. On cherche le nombre de solutions réelles de l'équation $(E_k) : e^x = kx$.

- a) Montrer que toute solution de (E_k) est strictement positive, puis que, sur $]0; +\infty[$, (E_k) équivaut à

$$\varphi(x) = k, \text{ où } \varphi(x) = \frac{e^x}{x}.$$

- a) Déterminer les limites de φ en 0 (à droite) et en $+\infty$.
- b) Étudier les variations de φ sur $]0; +\infty[$.
- c) Discuter, selon les valeurs de $k > 0$, le nombre de solutions de (E_k) . Justifier soigneusement.
- d) Pour $k = 3$, donner un encadrement d'amplitude 0,1 de la plus petite solution.

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).