

Corrigé et barème – Limites de fonctions, continuité et théorème des valeurs intermédiaires — niveau ★★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Exercice 1 – Automatismes

(3 pts)

- a) Forme « $\frac{0}{0}$ ». Pour $x \geq -1$ et $x \neq 0$: $\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{(1+x)-1}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{1+x}+1}$, qui tend vers $\frac{1}{2}$ quand $x \rightarrow 0$. On reconnaît aussi le nombre dérivé en 1 de la fonction racine carrée : $\frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$. (1 pt) (1)
- b) Forme « $\infty - \infty$ ». $e^{2x} - x^5 e^x = e^{2x} (1 - x^5 e^{-x})$. Par croissances comparées, $x^5 e^{-x} = \frac{x^5}{e^x} \rightarrow 0$; la parenthèse tend vers 1 et $e^{2x} \rightarrow +\infty$, donc la limite vaut $+\infty$. (1 pt) (1)
- c) On pose $X = \frac{1}{x}$: quand $x \rightarrow +\infty$, $X \rightarrow 0^+$ et $x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = \frac{e^X - 1}{X}$. Or $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{e^X - 1}{X} = \exp'(0) = 1$. Par composition, la limite vaut 1. (1 pt) (1)

Astuce — Un changement de variable $X = \frac{1}{x}$ transforme une limite en l'infini en une limite en 0, où l'on reconnaît souvent un nombre dérivé.

Exercice 2 – Démontrer — Croissances comparées

(5 pts)

- a) Soit $k(x) = e^x - x$: $k'(x) = e^x - 1 \geq 0$ sur $[0; +\infty[$, donc k est croissante et $k(x) \geq k(0) = 1 > 0$. Ensuite $h'(x) = e^x - x = k(x) > 0$: h est strictement croissante sur $[0; +\infty[$, donc $h(x) \geq h(0) = 1 > 0$. (1,5 pt : 0,5 pour k , 1 pour h) (1)
- b) D'après a), pour $x > 0$, $e^x > \frac{x^2}{2}$, donc $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$. Comme $\frac{x}{2} \rightarrow +\infty$, le théorème de comparaison donne $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$. (0,5 pt) (1)
- c) On pose $X = -x$: quand $x \rightarrow -\infty$, $X \rightarrow +\infty$ et $xe^x = -Xe^{-X} = -\frac{1}{e^X/X}$. D'après b), le dénominateur tend vers $+\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$. (1 pt) (1)
- d) $\left(\frac{e^{x/n}}{x/n}\right)^n = \frac{(e^{x/n})^n}{x^n/n^n} = \frac{n^n e^x}{x^n}$, d'où l'égalité en divisant par n^n . Quand $x \rightarrow +\infty$, $X = \frac{x}{n} \rightarrow +\infty$ et $\frac{e^X}{X} \rightarrow +\infty$ d'après b) ; sa puissance n -ième tend aussi vers $+\infty$ et $\frac{1}{n^n} > 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$. (1 pt : 0,5 pour l'égalité, 0,5 pour la limite) (1)
- e) Soit $g(x) = e^x - 10x^2$, continue sur $[1; +\infty[$. $g(1) = e - 10 < 0$. Pour $x > 0$, $g(x) = x^2 \left(\frac{e^x}{x^2} - 10\right)$; d'après d) avec $n = 2$, la parenthèse tend vers $+\infty$, donc $g(x) \rightarrow +\infty$. Il existe donc un réel $B > 1$ tel que $g(B) > 0$ (par exemple $g(6) = e^6 - 360 \approx 43 > 0$). g étant continue sur $[1; B]$ avec $g(1) < 0 < g(B)$, le théorème des valeurs intermédiaires fournit $c \in]1; B[$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire $e^c = 10c^2$. (1 pt) (1)

Méthode — Une limite égale à $+\infty$ fournit un point où la fonction est positive : c'est ce qui permet d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires sur un intervalle non borné.

Exercice 3 – Pour aller plus loin — Points fixes et cordes

(4 pts)

- a) Soit $g(x) = f(x) - x$, continue sur $[0; 1]$ comme différence de fonctions continues. $g(0) = f(0) \geq 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$. Comme 0 est compris entre $g(1)$ et $g(0)$, le théorème des valeurs intermédiaires fournit $c \in [0; 1]$ tel que $g(c) = 0$, soit $f(c) = c$. (1 pt) (1)
- b) $f(x) = \frac{1+x}{2}$ est continue sur $[0; 1[$ et, pour $0 \leq x < 1$, $\frac{1}{2} \leq f(x) < 1$: f envoie $]0; 1[$ dans $[0; 1[$. Mais $f(x) = x \iff 1+x = 2x \iff x = 1$, qui n'appartient pas à $]0; 1[$: f n'a pas de point fixe. L'intervalle fermé est indispensable. (1 pt) (1)
- c) g est continue sur $[0; \frac{1}{2}]$ (composée et différence de fonctions continues, avec $x + \frac{1}{2} \in [0; 1]$). $g(0) + g(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) - f(0) + f(1) - f(\frac{1}{2}) = f(1) - f(0) = 0$. Si $g(0) = 0$, $c = 0$ convient ; sinon $g(0)$ et $g(\frac{1}{2}) = -g(0)$ sont non nuls et de signes contraires, et le théorème des valeurs intermédiaires donne $c \in]0; \frac{1}{2}[$ avec $g(c) = 0$. Dans tous les cas, $f(c + \frac{1}{2}) = f(c)$. Interprétation : en notant $f(s)$ l'altitude lorsque la fraction s de la durée totale s'est écoulée, il existe deux instants séparés d'une demi-durée où le randonneur est à la même altitude. (1,5 pt : 0,5 pour la continuité, 0,5 pour le calcul de la somme, 0,5 pour la conclusion) (1)
- d) Soit $g(x) = f(x) - x$, continue sur $[0; +\infty[$. $g(0) = 1 > 0$ et, par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$; il existe donc $B > 0$ tel que $g(B) < 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires sur $[0; B]$ fournit c tel que $g(c) = 0$, soit $f(c) = c$. (0,5 pt) (1)

Erreur fréquente — Le théorème des valeurs intermédiaires s'applique à la fonction auxiliaire g , pas à f : ce sont la continuité de g et les signes de g aux bornes qu'il faut justifier.

Exercice 4 – Une suite définie par des équations

(4 pts)

- a) f_n est continue (polynôme) et $f'_n(x) = nx^{n-1} + 3 > 0$ sur $[0; 1]$: f_n est strictement croissante. $f_n(0) = -3 < 0$ et $f_n(1) = 1 + 3 - 3 = 1 > 0$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, $f_n(x) = 0$ admet une unique solution a_n dans $[0; 1]$; comme $f_n(0) \neq 0$ et $f_n(1) \neq 0$, on a $0 < a_n < 1$. (1 pt) (0,8)
- b) $a_1 : 4x - 3 = 0$, donc $a_1 = \frac{3}{4}$. $a_2 : x^2 + 3x - 3 = 0$, $\Delta = 9 + 12 = 21$, racines $\frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2}$; seule $\frac{-3 + \sqrt{21}}{2} \approx 0,79$ appartient à $]0; 1[$, donc $a_2 = \frac{\sqrt{21} - 3}{2}$. (0,5 pt) (0,8)
- c) Par définition, $a_n^n + 3a_n - 3 = 0$, donc $3a_n - 3 = -a_n^n$. Alors $f_{n+1}(a_n) = a_n^{n+1} + 3a_n - 3 = a_n^{n+1} - a_n^n = a_n^n(a_n - 1)$. Comme $0 < a_n < 1$, $f_{n+1}(a_n) < 0 = f_{n+1}(a_{n+1})$; f_{n+1} étant strictement croissante sur $[0; 1]$, on en déduit $a_n < a_{n+1}$. (1 pt : 0,5 pour le calcul, 0,5 pour la conclusion) (0,8)
- d) (a_n) est croissante et majorée par 1 : d'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers un réel ℓ . En passant à la limite dans $a_1 \leq a_n < 1$, on obtient $\frac{3}{4} \leq \ell \leq 1$, donc $0 < \ell \leq 1$. (0,5 pt) (0,8)
- e) Supposons $\ell < 1$. La suite étant croissante de limite ℓ , on a $0 < a_n \leq \ell$ pour tout n , donc $0 < a_n^n \leq \ell^n$. Comme $0 < \ell < 1$, $\ell^n \rightarrow 0$ et, par le théorème des gendarmes, $a_n^n \rightarrow 0$. Or $a_n^n = 3(1 - a_n) \rightarrow 3(1 - \ell) > 0$: contradiction avec l'unicité de la limite. Donc $\ell = 1$. (1 pt) (0,8)

Piège — Dans a_n^n , la base et l'exposant varient ensemble : savoir que $a_n < 1$ ne suffit pas pour affirmer que $a_n^n \rightarrow 0$. Il faut une base fixe $\ell < 1$ pour majorer, d'où le raisonnement par l'absurde.

Exercice 5 – Problème — Combien de solutions ?*(4 pts)*

- a) Si $x \leq 0$, alors $kx \leq 0 < e^x$ (car $k > 0$) : x n'est pas solution. Toute solution est donc strictement positive et, pour $x > 0$, $e^x = kx \iff \frac{e^x}{x} = k \iff \varphi(x) = k$. (0,5 pt) (0,8)
- b) En 0^+ : $e^x \rightarrow 1$ et $x \rightarrow 0$ avec $x > 0$, donc $\varphi(x) \rightarrow +\infty$ (quotient). En $+\infty$: par croissances comparées, $\varphi(x) \rightarrow +\infty$. (1 pt : 0,5 par limite) (0,8)
- c) $\varphi'(x) = \frac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$, du signe de $x-1$. φ est strictement décroissante sur $]0; 1]$, strictement croissante sur $[1; +\infty[$, de minimum $\varphi(1) = e$. (0,5 pt) (0,8)
- d) Si $0 < k < e$: $\varphi(x) \geq e > k$ pour tout $x > 0$, donc aucune solution. Si $k = e$: le minimum e n'est atteint qu'en $x = 1$ (monotonie stricte de part et d'autre), donc une seule solution, $x = 1$. Si $k > e$: sur $]0; 1]$, φ est continue, strictement décroissante, de limite $+\infty$ en 0^+ et $\varphi(1) = e$; comme $k \in]e; +\infty[$, le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires donne une unique solution dans $]0; 1]$. De même, sur $[1; +\infty[$, φ est continue, strictement croissante de e à $+\infty$: une unique solution dans $[1; +\infty[$. Soit deux solutions au total. (1,5 pt : 0,5 par cas) (0,8)
- e) $3 > e$: il y a deux solutions, la plus petite dans $]0; 1]$, où φ est strictement décroissante. $\varphi(0,6) = \frac{e^{0,6}}{0,6} \approx 3,04 > 3$ et $\varphi(0,7) = \frac{e^{0,7}}{0,7} \approx 2,88 < 3$, donc la plus petite solution est comprise entre 0,6 et 0,7. (0,5 pt) (0,8)

Astuce — Isoler le paramètre ($k = \varphi(x)$) ramène la discussion à la lecture d'un seul tableau de variations : le nombre de solutions est le nombre de points d'intersection de la courbe de φ avec la droite horizontale d'équation $y = k$.