

Devoir surveillé – Limites de fonctions, continuité et théorème des valeurs intermédiaires — niveau ★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Nom : _____

Date : _____

Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Automatismes

(3 pts)

- a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$.
- b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 3x) e^x$.
- c) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$.
- d) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3}$.

Exercice 2 – Qui a raison ?

(4 pts)

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse, puis justifier (un contre-exemple suffit pour une affirmation fausse). a) « Si f est continue sur $[0; 1]$, avec $f(0) = 1$ et $f(1) = -1$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[0; 1]$. »

- a) « Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = 0$. »
- b) « Si, pour tout $x > 0$, $f(x) \leq g(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. »
- c) « Si f est continue sur $\mathbb{R}$ et si la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers un réel ℓ , alors $f(\ell) = \ell$. »

Exercice 3 – Deux solutions, dont une évidente

(4 pts)

- a) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-2)e^x + 2$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat.
- b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- c) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations complet de f .
- d) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$: l'une est un entier à déterminer, l'autre, notée β , est strictement supérieure à 1.
- e) Donner un encadrement de β d'amplitude 0,1.

Exercice 4 – Suite récurrente : le bon point fixe**(4 pts)**

- a) Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2 + 4}{5}$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, étudier les variations de f et résoudre l'équation $f(x) = x$.
- b) On définit la suite (u_n) par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 2$.
- c) En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.
- d) Un élève affirme : « avec $u_0 = 5$, la suite converge vers 4, puisque 4 est l'autre solution de $f(x) = x$ ». Montrer qu'il a tort.

Exercice 5 – Problème — La chute d'un parachutiste**(5 pts)**

- a) Avant l'ouverture du parachute, la vitesse (en m/s) d'un parachutiste t secondes après le saut est modélisée par $v(t) = 50(1 - e^{-0,2t})$ pour $t \geq 0$. Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t)$ et interpréter ce résultat.
- b) Justifier que v est continue sur $[0; +\infty[$, calculer $v'(t)$ et en déduire le sens de variation de v .
- c) Démontrer qu'il existe un unique instant $t_1 \geq 0$ auquel la vitesse atteint 45 m/s.
- d) Déterminer, par balayage ou par dichotomie, un encadrement de t_1 d'amplitude 0,1.
- e) Un second modèle propose $w(t) = \frac{50t}{t+5}$. Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} w(t)$, résoudre $w(t) = 45$ et comparer avec le premier modèle.

Bon courage !