

Corrigé et barème – Limites de fonctions, continuité et théorème des valeurs intermédiaires — niveau ★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Exercice 1 – Automatismes

(3 pts)

- a) Forme « $\infty - \infty$ ». Avec la quantité conjuguée : $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{(x+1) - x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$.
Le dénominateur tend vers $+\infty$, donc la limite vaut 0. (1 pt) (0,75)
- b) $(x^2 + 3x)e^x = x^2e^x + 3xe^x$. Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$, donc la limite vaut 0. (1 pt) (0,75)
- c) C'est le taux d'accroissement de la fonction exponentielle entre 0 et x : $\frac{e^x - e^0}{x - 0}$. La fonction exponentielle étant dérivable en 0, il tend vers $\exp'(0) = e^0 = 1$. (0,5 pt) (0,75)
- d) Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ pour tout entier naturel n ; avec $n = 3$, la limite vaut $+\infty$. (0,5 pt) (0,75)

Méthode — Une différence de racines carrées en forme « $\infty - \infty$ » se traite par la quantité conjuguée : le produit $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$ fait disparaître les racines.

Exercice 2 – Qui a raison ?

(4 pts)

- a) Faux. Le théorème des valeurs intermédiaires garantit au moins une solution, pas l'unicité. Contre-exemple : $f(x) = \cos(3\pi x)$ est continue sur $[0; 1]$, $f(0) = 1$, $f(1) = \cos(3\pi) = -1$, et f s'annule en $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{5}{6}$ (pour ces valeurs, $3\pi x$ vaut $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ et $\frac{5\pi}{2}$). (1 pt) (1)
- b) Faux : « $+\infty - \infty$ » est une forme indéterminée. Contre-exemple : $f(x) = x^2$ et $g(x) = -x$; alors $f(x) + g(x) = x(x - 1) \rightarrow +\infty$. (1 pt) (1)
- c) Faux : c'est une minoration par une fonction qui tend vers $+\infty$ qui permet de conclure, pas une majoration. Contre-exemple : $f(x) = -x$ et $g(x) = x$; on a bien $f(x) \leq g(x)$ pour $x > 0$ et $g(x) \rightarrow +\infty$, mais $f(x) \rightarrow -\infty$. (1 pt) (1)
- d) Vrai. La suite (u_{n+1}) est la même suite décalée d'un rang, donc $u_{n+1} \rightarrow \ell$. Comme f est continue en ℓ et $u_n \rightarrow \ell$, $f(u_n) \rightarrow f(\ell)$. Or $u_{n+1} = f(u_n)$: par unicité de la limite, $f(\ell) = \ell$. (1 pt) (1)

Piège — Une affirmation générale se réfute par un seul contre-exemple, mais se démontre par un raisonnement valable dans tous les cas : un exemple qui fonctionne ne prouve rien.

Exercice 3 – Deux solutions, dont une évidente

(4 pts)

- a) $(x-2)e^x = xe^x - 2e^x$. Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$, et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 - 0 + 2 = 2$: la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $-\infty$. (1 pt) (0,8)
- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, donc, par produit puis par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. (0,5 pt) (0,8)
- c) $f'(x) = 1 \times e^x + (x-2)e^x = (x-1)e^x$, du signe de $x-1$ car $e^x > 0$. f est strictement décroissante sur $] -\infty ; 1]$ et strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$, de minimum $f(1) = 2 - e \approx -0,72$. Tableau : 2 (limite en $-\infty$) $\searrow$ $2 - e$ (en $x = 1$) $\nearrow +\infty$. (1 pt) (0,8)
- d) Sur $] -\infty ; 1]$: $f(0) = (0-2) \times 1 + 2 = 0$, et f y est strictement décroissante, donc 0 est l'unique solution sur cet intervalle. Sur $[1 ; +\infty[$: f est continue, strictement croissante, $f(1) = 2 - e < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation y admet une unique solution β , et $\beta \neq 1$ car $f(1) \neq 0$. Au total, exactement deux solutions : 0 et $\beta > 1$. (1 pt : 0,5 par intervalle) (0,8)
- e) $f(1,5) = -0,5e^{1,5} + 2 \approx -0,24 < 0$ et $f(1,6) = -0,4e^{1,6} + 2 \approx 0,02 > 0$, donc $1,5 < \beta < 1,6$. (0,5 pt) (0,8)

Astuce — Avant de lancer la calculatrice, on teste les valeurs simples (0, 1, -1) : une solution évidente dispense d'un encadrement et découpe naturellement l'étude en intervalles.

Exercice 4 – Suite récurrente : le bon point fixe

(4 pts)

- a) $x^2 \rightarrow +\infty$, donc $f(x) \rightarrow +\infty$. $f'(x) = \frac{2x}{5} \geq 0$ sur $[0 ; +\infty[$: f est croissante sur cet intervalle. $f(x) = x \iff x^2 - 5x + 4 = 0 \iff (x-1)(x-4) = 0$: les solutions sont 1 et 4. (1 pt) (1)
- b) Initialisation : $u_1 = \frac{4+4}{5} = 1,6$ et $1 \leq 1,6 \leq 2 \leq 2$. Hérédité : si $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 2$, la croissance de f sur $[0 ; +\infty[$ donne $f(1) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(2)$, soit $1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 1,6 \leq 2$. La propriété est donc vraie pour tout entier naturel n . (1 pt : 0,5 pour l'initialisation, 0,5 pour l'hérédité) (1)
- c) (u_n) est décroissante et minorée par 1, donc elle converge vers un réel ℓ avec $1 \leq \ell \leq 2$. f étant continue (polynôme), $\ell = f(\ell)$, donc $\ell \in \{1 ; 4\}$; comme $\ell \leq 2$, $\ell = 1$. (1 pt) (1)
- d) Si $u_n \geq 5$, alors $u_{n+1} = f(u_n) \geq f(5) = \frac{29}{5} \geq 5$: par récurrence (avec $u_0 = 5$), $u_n \geq 5$ pour tout n . Une limite éventuelle vérifierait $\ell \geq 5$ et $f(\ell) = \ell$, ce qui est impossible puisque les seuls points fixes sont 1 et 4 : la suite diverge. Plus précisément, $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 - 5u_n + 4}{5} = \frac{(u_n - 1)(u_n - 4)}{5} > 0$, donc la suite est croissante ; n'étant pas convergente, elle n'est pas majorée et tend vers $+\infty$. (1 pt) (1)

Erreur fréquente — L'équation $f(\ell) = \ell$ ne fournit que des candidats pour la limite : il faut d'abord prouver la convergence, puis utiliser les encadrements obtenus pour choisir le bon point fixe.

Exercice 5 – Problème — La chute d’un parachutiste**(5 pts)**

- a) $\lim_{t \rightarrow +\infty} (-0,2t) = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$: par composition, $e^{-0,2t} \rightarrow 0$, donc $v(t) \rightarrow 50$. La vitesse se stabilise vers une vitesse limite de 50 m/s. (0,5 pt) (1)
- b) v est continue comme composée et combinaison linéaire de fonctions continues (affine et exponentielle). $v'(t) = 50 \times 0,2 e^{-0,2t} = 10 e^{-0,2t} > 0$: v est strictement croissante sur $[0; +\infty[$. (1 pt) (1)
- c) v est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$, $v(0) = 50(1 - 1) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 50$. Comme $45 \in [0; 50[$, le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires assure l’existence d’un unique $t_1 \geq 0$ tel que $v(t_1) = 45$. (1 pt) (1)
- d) $v(11,5) = 50(1 - e^{-2,3}) \approx 44,99 < 45$ et $v(11,6) = 50(1 - e^{-2,32}) \approx 45,09 > 45$, donc $11,5 < t_1 < 11,6$: la vitesse de 45 m/s est atteinte au bout d’environ 11,5 s. (1 pt) (1)
- e) Pour $t > 0$, $w(t) = \frac{50}{1 + \frac{5}{t}}$, qui tend vers $\frac{50}{1} = 50$: même vitesse limite. Pour $t \geq 0$, $w(t) = 45 \iff 50t = 45(t + 5) \iff 5t = 225 \iff t = 45$. Le premier modèle atteint 45 m/s au bout de 11,5 s environ, le second au bout de 45 s : les deux modèles ont la même limite mais des vitesses d’approche très différentes. (1,5 pt : 0,5 pour la limite, 0,5 pour l’équation, 0,5 pour la comparaison) (1)

Piège — Une limite n’est pas forcément une valeur atteinte : $v(t) < 50$ pour tout t . C’est pourquoi on applique le corollaire avec l’intervalle semi-ouvert $[0; 50[$.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).