

Devoir surveillé – Limites de fonctions, continuité et théorème des valeurs intermédiaires — niveau ★

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Nom : _____

Date : _____

Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Automatismes

(5 pts)

- a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 4x + 2)$.
- b) Déterminer les limites de $\frac{3}{x-2}$ quand x tend vers 2 par valeurs supérieures, puis par valeurs inférieures.
- c) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-2x}$.
- d) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x}{x^2 - 3}$.
- e) Justifier que la fonction f définie par $f(x) = \frac{x+1}{x^2+4}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 – Une équation sans formule

(5 pts)

- a) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x - 3$. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- b) Calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
- c) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, puis que $1 < \alpha < 2$.
- d) À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement de α d'amplitude 0,1.
- e) En déduire le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x .

Exercice 3 – Comparer et encadrer

(5 pts)

- a) Soit $u(x) = 3x - \sin x$. Montrer que $u(x) \geq 3x - 1$ pour tout réel x , puis déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)$.
- b) Soit $v(x) = \frac{2x + \cos x}{x}$ pour $x > 0$. Encadrer $v(x)$, puis déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x)$.
- c) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sin x - x^2)$.
- d) Un élève écrit : « $-x^2 \leq x^2 \cos x \leq x^2$, donc d'après le théorème des gendarmes, $x^2 \cos x$ a une limite en $+\infty$ ». Expliquer pourquoi ce raisonnement est faux.

Exercice 4 – Problème — Une suite qui se stabilise**(5 pts)**

- a) Soit f la fonction définie sur $\left[-\frac{3}{2}; +\infty\right[$ par $f(x) = \sqrt{2x+3}$, et (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$. Calculer u_1 et u_2 (valeurs exactes, puis arrondies au centième).
- b) Justifier que f est continue et croissante sur son ensemble de définition, et calculer $f(3)$.
- c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$.
- d) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
- e) On note ℓ sa limite. Justifier que $f(\ell) = \ell$, puis déterminer ℓ .

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).