

Corrigé et barème – Limites de fonctions, continuité et théorème des valeurs intermédiaires — niveau ★

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Exercice 1 – Automatismes

(5 pts)

- a) Pour $x \neq 0$, $x^3 - 4x + 2 = x^3 \left(1 - \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)$. La parenthèse tend vers 1 et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$, donc, par produit, la limite vaut $-\infty$. (1 pt) (1)
- b) Quand $x \rightarrow 2^+$, $x - 2 \rightarrow 0$ avec $x - 2 > 0$, donc $\frac{3}{x-2} \rightarrow +\infty$; quand $x \rightarrow 2^-$, $x - 2 \rightarrow 0$ avec $x - 2 < 0$, donc $\frac{3}{x-2} \rightarrow -\infty$. La droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à la courbe. (1 pt : 0,5 par limite) (1)
- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - 2x) = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$; par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-2x} = 0$. (1 pt) (1)
- d) Pour x assez grand, $\frac{2x^2 + x}{x^2 - 3} = \frac{x^2 \left(2 + \frac{1}{x}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{3}{x^2}\right)} = \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{3}{x^2}}$, qui tend vers $\frac{2}{1} = 2$. (1 pt) (1)
- e) f est une fonction rationnelle, donc continue sur son ensemble de définition. Or $x^2 + 4 \geq 4 > 0$ pour tout réel x : le dénominateur ne s'annule jamais, donc f est définie et continue sur $\mathbb{R}$. (1 pt) (1)

Méthode — Devant un quotient de polynômes en l'infini, on factorise numérateur et dénominateur par leur terme de plus haut degré : la forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ » disparaît.

Exercice 2 – Une équation sans formule

(5 pts)

- a) En $+\infty$: $x^3 \rightarrow +\infty$ et $x - 3 \rightarrow +\infty$, donc $f(x) \rightarrow +\infty$ (somme). En $-\infty$: pour $x \neq 0$, $f(x) = x^3 \left(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^3}\right)$; la parenthèse tend vers 1 et $x^3 \rightarrow -\infty$, donc $f(x) \rightarrow -\infty$. (1 pt : 0,5 par limite) (1)
- b) $f'(x) = 3x^2 + 1$. Pour tout réel x , $3x^2 \geq 0$, donc $f'(x) \geq 1 > 0$: f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. (1 pt) (1)
- c) f est continue sur $\mathbb{R}$ (polynôme) et strictement croissante ; ses limites sont $-\infty$ et $+\infty$, et 0 est compris entre elles. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (théorème de la bijection), l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α . De plus $f(1) = 1 + 1 - 3 = -1 < 0$ et $f(2) = 8 + 2 - 3 = 7 > 0$, donc $f(1) < f(\alpha) < f(2)$ et, f étant strictement croissante, $1 < \alpha < 2$. (1,5 pt : 1 pour l'existence et l'unicité, 0,5 pour l'encadrement) (1)
- d) Tableau de valeurs de pas 0,1 : $f(1,2) = 1,728 + 1,2 - 3 = -0,072 < 0$ et $f(1,3) = 2,197 + 1,3 - 3 = 0,497 > 0$. Donc $1,2 < \alpha < 1,3$. (1 pt) (1)
- e) f est strictement croissante et s'annule en α : $f(x) < 0$ pour $x < \alpha$, $f(\alpha) = 0$ et $f(x) > 0$ pour $x > \alpha$. (0,5 pt) (1)

Piège — Le théorème des valeurs intermédiaires seul donne l'existence d'une solution ; c'est la stricte monotonie qui apporte l'unicité. Les deux arguments doivent figurer dans la copie.

Exercice 3 – Comparer et encadrer

(5 pts)

- a) Pour tout réel x , $\sin x \leq 1$, donc $-\sin x \geq -1$ et $u(x) \geq 3x - 1$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - 1) = +\infty$, le théorème de comparaison donne $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$. (1,5 pt : 0,5 pour l'inégalité, 1 pour la conclusion) (1,25)
- b) Pour $x > 0$, $v(x) = 2 + \frac{\cos x}{x}$. Comme $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $x > 0 : 2 - \frac{1}{x} \leq v(x) \leq 2 + \frac{1}{x}$. Les deux encadrants tendent vers 2 en $+\infty$, donc, par le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = 2$. (1,5 pt : 0,5 pour l'encadrement, 1 pour la conclusion) (1,25)
- c) Pour tout réel x , $\sin x - x^2 \leq 1 - x^2$. Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - x^2) = -\infty$, donc, par comparaison, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sin x - x^2) = -\infty$. (1 pt) (1,25)
- d) Le théorème des gendarmes exige que les deux fonctions qui encadrent aient la même limite finie. Ici $-x^2 \rightarrow -\infty$ et $x^2 \rightarrow +\infty$: l'encadrement ne permet aucune conclusion. D'ailleurs $x^2 \cos x$ n'a pas de limite en $+\infty$: elle vaut $4k^2\pi^2$ en $x = 2k\pi$ et $-(2k+1)^2\pi^2$ en $x = (2k+1)\pi$. (1 pt) (1,25)

Erreur fréquente — Pour une limite infinie, une seule inégalité suffit (minorer pour $+\infty$, majorer pour $-\infty$) ; l'encadrement des deux côtés ne sert que pour une limite finie.

Exercice 4 – Problème — Une suite qui se stabilise

(5 pts)

- a) $u_1 = f(0) = \sqrt{3} \approx 1,73$; $u_2 = f(\sqrt{3}) = \sqrt{2\sqrt{3} + 3} \approx 2,54$. (0,5 pt) (1)
- b) La fonction $x \mapsto 2x + 3$ est affine, continue, croissante et positive sur $[-\frac{3}{2}; +\infty[$; la fonction racine carrée est continue et croissante sur $[0; +\infty[$. Par composition, f est continue et croissante sur $[-\frac{3}{2}; +\infty[$. Enfin $f(3) = \sqrt{9} = 3$. (1 pt) (1)
- c) Soit $P(n) : \ll 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3 \gg$. Initialisation : $u_0 = 0$ et $u_1 = \sqrt{3} \approx 1,73$, donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 3$. Hérédité : si $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$, la croissance de f donne $f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(3)$, soit $\sqrt{3} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 3$, et a fortiori $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 3$. Conclusion : $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n . (1,5 pt : 0,5 pour l'initialisation, 1 pour l'hérédité) (1)
- d) La suite est croissante ($u_n \leq u_{n+1}$) et majorée par 3 : d'après le théorème de convergence monotone, elle converge. (0,5 pt) (1)
- e) Comme $0 \leq u_n \leq 3$ pour tout n , on a $0 \leq \ell \leq 3$. D'une part $u_{n+1} \rightarrow \ell$; d'autre part, f étant continue en ℓ , $f(u_n) \rightarrow f(\ell)$. Comme $u_{n+1} = f(u_n)$, l'unicité de la limite donne $f(\ell) = \ell$. Alors $\sqrt{2\ell + 3} = \ell$ avec $\ell \geq 0$, donc $2\ell + 3 = \ell^2$, soit $\ell^2 - 2\ell - 3 = 0$, c'est-à-dire $(\ell - 3)(\ell + 1) = 0$. Comme $\ell \geq 0$, $\ell = 3$. (1,5 pt : 0,5 pour $f(\ell) = \ell$ justifié, 1 pour la résolution) (1)

Astuce — Quand on résout $\sqrt{A} = \ell$ en élevant au carré, on garde la condition $\ell \geq 0$: c'est elle qui élimine la racine parasite -1 .