

Devoir surveillé – Géométrie dans l'espace : vecteurs, droites, plans et produit scalaire — niveau ★★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Nom : _____

Date : _____

Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Automatismes

(3 pts)

- Déterminer le réel m pour lequel les vecteurs $\vec{u}(1; 2; -1)$, $\vec{v}(-1; 1; 0)$ et $\vec{w}(1; m; -4)$ sont coplanaires.
- Soit $A(1; -2; 3)$ et $B(3; 0; -1)$. Montrer que l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $MA = MB$ est le plan d'équation $x + y - 2z + 1 = 0$, puis vérifier que ce plan passe par le milieu I de $[AB]$ et qu'il est orthogonal à la droite (AB) .
- Montrer que les plans $\mathcal{P} : x + y - z - 1 = 0$ et $\mathcal{Q} : 2x - y + z - 2 = 0$ sont sécants et déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection.

Exercice 2 – Démontrer — Distance d'un point à une droite

(4 pts)

- Soit d une droite, A un point et H le projeté orthogonal de A sur d ($H \in d$ et $\overrightarrow{AH}$ est orthogonal à tout vecteur directeur de d). Démontrer que, pour tout point M de d , $AM^2 = AH^2 + HM^2$.
- En déduire que H est l'unique point de d le plus proche de A .
- Application : $A(1; 2; -1)$ et $d : x = 2 + t, y = -1 + 2t, z = t$ ($t \in \mathbb{R}$). On note M_t le point de d de paramètre t . Montrer que $AM_t^2 = 6t^2 - 8t + 11$.
- En déduire la distance du point A à la droite d et les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur d ; contrôler le résultat à l'aide d'un produit scalaire.

Exercice 3 – Problème — Deux diagonales de faces d'un cube

(5 pts)

- $ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1 (face $ABCD$ en bas ; E, F, G, H au-dessus de A, B, C, D), muni du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. Donner une représentation paramétrique de chacune des droites (AF) et (BG) .
- Démontrer que les droites (AF) et (BG) sont non coplanaires.
- Démontrer qu'il existe un unique point M de (AF) et un unique point N de (BG) tels que la droite (MN) soit orthogonale à la fois à (AF) et à (BG) , et donner leurs coordonnées.
- Montrer que $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$ et en déduire la longueur MN .
- Démontrer que, pour tout point P de (AF) et tout point Q de (BG) , on a $PQ \geq MN$.

Exercice 4 – Recherche — Une famille de plans*(4 pts)*

- a) Pour tout réel m , on note $\mathcal{P}_m$ l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $(1 + m)x + y - mz - 2 = 0$. Justifier que $\mathcal{P}_m$ est un plan pour tout réel m .
- b) Montrer que la droite Δ de représentation paramétrique $x = t, y = 2 - t, z = t$ ($t \in \mathbb{R}$) est contenue dans tous les plans $\mathcal{P}_m$.
- c) Déterminer le réel m pour lequel le plan $\mathcal{P}_m$ est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}_0$, et donner une équation du plan obtenu.
- d) Déterminer le plan de la famille qui contient le point $A(1; 0; 3)$.
- e) Tout plan contenant la droite Δ est-il l'un des plans $\mathcal{P}_m$? Justifier.

Exercice 5 – Pour aller plus loin — Le tétraèdre trirectangle*(4 pts)*

- a) Soit a, b, c trois réels strictement positifs et les points $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$. Montrer que $\vec{n} \left(\frac{1}{a}; \frac{1}{b}; \frac{1}{c} \right)$ est normal au plan (ABC) et que ce plan a pour équation $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.
- b) On note H le projeté orthogonal de l'origine O sur le plan (ABC) et $S = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$. En utilisant une représentation paramétrique de la droite (OH) , démontrer que $\frac{1}{OH^2} = S$.
- c) Application : $a = 1$ et $b = c = 2$. Calculer OH , le volume du tétraèdre $OABC$, puis l'aire du triangle ABC .
- d) Dans le cas général, on note $\mathcal{A}_{XYZ}$ l'aire d'un triangle XYZ . Démontrer que $\mathcal{A}_{ABC}^2 = \mathcal{A}_{OAB}^2 + \mathcal{A}_{OBC}^2 + \mathcal{A}_{OCA}^2$.

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).