

Corrigé et barème – Géométrie dans l'espace : vecteurs, droites, plans et produit scalaire — niveau ★★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Exercice 1 – Automatismes

(3 pts)

- a) Si $\vec{u} = k\vec{v}$, les cotes donnent $-1 = 0$: impossible, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. Les trois vecteurs sont coplanaires si et seulement s'il existe des réels a, b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$, soit $a - b = 1$, $2a + b = m$ et $-a = -4$. D'où $a = 4$, $b = 3$ et $m = 2 \times 4 + 3 = 11$. (1 pt) (1)
- b) $MA^2 = MB^2 \iff (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = (x-3)^2 + y^2 + (z+1)^2 \iff -2x + 4y - 6z + 14 = -6x + 2z + 10 \iff 4x + 4y - 8z + 4 = 0 \iff x + y - 2z + 1 = 0$ (les distances étant positives, $MA = MB \iff MA^2 = MB^2$). $I(2; -1; 1) : 2 - 1 - 2 + 1 = 0$, donc I est dans le plan ; $\vec{AB}(2; 2; -4) = 2(1; 1; -2)$ est colinéaire au vecteur normal $(1; 1; -2)$: le plan est orthogonal à (AB) . (0,5 pt + 0,5 pt) (1)
- c) Les vecteurs normaux $(1; 1; -1)$ et $(2; -1; 1)$ ne sont pas colinéaires (rapports 2 et -1), donc les plans sont sécants. En ajoutant les équations : $3x - 3 = 0$, soit $x = 1$; puis $1 + y - z - 1 = 0$, soit $y = z$. Droite d'intersection : $x = 1, y = t, z = t$ ($t \in \mathbb{R}$). Contrôle : $1 + t - t - 1 = 0$ et $2 - t + t - 2 = 0$. (1 pt) (1)

Astuce — Comparer MA^2 et MB^2 plutôt que MA et MB : les carrés se développent, les termes x^2, y^2, z^2 disparaissent et il reste une équation de plan.

Exercice 2 – Démontrer — Distance d'un point à une droite

(4 pts)

- a) $\vec{AM} = \vec{AH} + \vec{HM}$, donc $AM^2 = AH^2 + 2\vec{AH} \cdot \vec{HM} + HM^2$. Comme H et M sont sur d , $\vec{HM}$ est nul ou dirige d ; dans les deux cas $\vec{AH} \cdot \vec{HM} = 0$. D'où $AM^2 = AH^2 + HM^2$. (1 pt) (1)
- b) $HM^2 \geq 0$ donne $AM^2 \geq AH^2$, donc $AM \geq AH$ pour tout $M \in d$; l'égalité impose $HM = 0$, c'est-à-dire $M = H$. (0,5 pt) (1)
- c) $\vec{AM}_t(2+t-1; -1+2t-2; t+1) = (1+t; 2t-3; 1+t)$, donc $AM_t^2 = (1+t)^2 + (2t-3)^2 + (1+t)^2 = 2(t^2 + 2t + 1) + 4t^2 - 12t + 9 = 6t^2 - 8t + 11$. (1 pt) (1)
- d) Trinôme de coefficient dominant $6 > 0$: minimum en $t = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$, de valeur $6 \times \frac{4}{9} - \frac{16}{3} + 11 = \frac{8}{3} - \frac{16}{3} + \frac{33}{3} = \frac{25}{3}$. D'après b), ce minimum est atteint en $H : H = M_{2/3} \left(\frac{8}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3} \right)$ et la distance cherchée est $AH = \sqrt{\frac{25}{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$. Contrôle : $\vec{AH} \left(\frac{5}{3}; -\frac{5}{3}; \frac{5}{3} \right)$ et $\vec{u}(1; 2; 1)$ dirige d : $\vec{AH} \cdot \vec{u} = \frac{5}{3} - \frac{10}{3} + \frac{5}{3} = 0$. (1,5 pt) (1)

Méthode — La distance d'un point à une droite s'obtient au choix en minimisant un trinôme en t ou en résolvant $\vec{AM}_t \cdot \vec{u} = 0$: les deux méthodes donnent le même paramètre, ce qui fournit un contrôle gratuit.

Exercice 3 – Problème — Deux diagonales de faces d'un cube

(5 pts)

- a) $A(0; 0; 0)$, $F(1; 0; 1)$, $B(1; 0; 0)$, $G(1; 1; 1)$. (AF) , dirigée par $\overrightarrow{AF}(1; 0; 1) : x = t, y = 0, z = t$; (BG) , dirigée par $\overrightarrow{BG}(0; 1; 1) : x = 1, y = s, z = s$ ($t, s \in \mathbb{R}$, deux paramètres distincts). (0,5 pt) (1)
- b) Si $\overrightarrow{BG} = k\overrightarrow{AF}$, les abscisses donnent $k = 0$ et les ordonnées $1 = 0$: les directions ne sont pas colinéaires. Un point commun vérifierait $t = 1, 0 = s$ et $t = s$, d'où $1 = 0$: impossible. Ni parallèles ni sécantes, les droites sont non coplanaires. (1 pt) (1)
- c) $M(t; 0; t)$, $N(1; s; s)$ et $\overrightarrow{MN}(1 - t; s; s - t)$. Les conditions s'écrivent $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AF} = 1 - t + s - t = 1 + s - 2t = 0$ et $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BG} = s + s - t = 2s - t = 0$. La seconde donne $t = 2s$, puis $1 + s - 4s = 0$, soit $s = \frac{1}{3}$ et $t = \frac{2}{3}$: solution unique. $M\left(\frac{2}{3}; 0; \frac{2}{3}\right)$ et $N\left(1; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$; comme $M \neq N$, la droite (MN) existe. (1,5 pt) (1)
- d) $\overrightarrow{MN}\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$; avec $E(0; 0; 1)$ et $C(1; 1; 0)$, $\overrightarrow{EC}(1; 1; -1)$, donc $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$. Comme $EC = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$, $MN = \frac{\sqrt{3}}{3}$. (1 pt) (1)
- e) $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NQ}$, avec $\overrightarrow{PM} = \alpha\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{NQ} = \beta\overrightarrow{BG}$ (α, β réels). Posons $\vec{w} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{NQ}$: d'après c), $\vec{w} \cdot \overrightarrow{MN} = \alpha\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{MN} + \beta\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$. Donc $PQ^2 = \|\vec{w} + \overrightarrow{MN}\|^2 = \|\vec{w}\|^2 + MN^2 \geq MN^2$, et $PQ \geq MN = \frac{\sqrt{3}}{3}$: MN est la plus courte distance entre les deux droites. (1 pt) (1)

Piège — Utiliser le même paramètre pour deux droites différentes oblige leurs points à « avancer ensemble » : il faut deux paramètres distincts, sinon on manque les points communs ou la perpendiculaire commune.

Exercice 4 – Recherche — Une famille de plans

(4 pts)

- a) L'équation est de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a; b; c) = (1 + m; 1; -m)$, qui n'est jamais le vecteur nul puisque $b = 1$: $\mathcal{P}_m$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}_m(1 + m; 1; -m)$. (0,5 pt) (0,8)
- b) Pour tout réel t : $(1 + m)t + (2 - t) - mt - 2 = t + mt + 2 - t - mt - 2 = 0$. Tout point de Δ appartient à $\mathcal{P}_m$, et ce pour tout m . (1 pt) (0,8)
- c) $\vec{n}_0(1; 1; 0)$ et $\vec{n}_m \cdot \vec{n}_0 = (1 + m) + 1 + 0 = m + 2$, nul si et seulement si $m = -2$. Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux : $\mathcal{P}_{-2} : -x + y + 2z - 2 = 0$. (1 pt) (0,8)
- d) $A \in \mathcal{P}_m \iff (1 + m) + 0 - 3m - 2 = 0 \iff -1 - 2m = 0 \iff m = -\frac{1}{2}$. $\mathcal{P}_{-1/2} : \frac{1}{2}x + y + \frac{1}{2}z - 2 = 0$, soit $x + 2y + z - 4 = 0$ (contrôle : $1 + 0 + 3 - 4 = 0$). (0,5 pt) (0,8)
- e) Non. Le plan $\Pi : x - z = 0$ contient Δ ($t - t = 0$ pour tout t). S'il était égal à un $\mathcal{P}_m$, $\vec{n}_m(1 + m; 1; -m)$ serait colinéaire à $(1; 0; -1)$, ce qui imposerait une ordonnée nulle : $1 = 0$, absurde. Plus précisément, un plan contenant Δ a un vecteur normal $(\alpha; \beta; \gamma)$ orthogonal à $\vec{u}(1; -1; 1)$, soit $\alpha - \beta + \gamma = 0$, et contient $(0; 2; 0)$. Si $\beta \neq 0$, on peut prendre $\beta = 1$ et poser $m = -\gamma$, d'où $\alpha = 1 + m$: c'est $\mathcal{P}_m$. Si $\beta = 0$, $\alpha = -\gamma$ et l'on obtient Π . Ainsi Π est le seul plan contenant Δ qui manque à la famille. (1 pt) (0,8)

Erreur fréquente — Un seul point commun ne prouve pas qu'une droite est contenue dans un plan : il faut que l'équation soit vérifiée pour tout t , ou au moins en deux points distincts de la droite.

Exercice 5 – Pour aller plus loin — Le tétraèdre trirectangle

(4 pts)

- a) $\overrightarrow{AB}(-a; b; 0)$ et $\overrightarrow{AC}(-a; 0; c)$ ne sont pas colinéaires (la cote de $\overrightarrow{AB}$ est nulle, pas celle de $\overrightarrow{AC}$, et $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$). $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = -1 + 1 + 0 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = -1 + 0 + 1 = 0$: $\vec{n}$ est normal à (ABC) . Équation $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} + d = 0$; avec $A : 1 + d = 0$, d'où $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. (1 pt) (1)
- b) (OH) passe par O et est dirigée par $\vec{n} : x = \frac{\lambda}{a}, y = \frac{\lambda}{b}, z = \frac{\lambda}{c} (\lambda \in \mathbb{R})$. H est sur le plan : $\lambda \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) = 1$, soit $\lambda = \frac{1}{S}$. Alors $\overrightarrow{OH} = \frac{1}{S} \vec{n}$ et $OH = \frac{1}{S} \|\vec{n}\| = \frac{\sqrt{S}}{S} = \frac{1}{\sqrt{S}}$, d'où $\frac{1}{OH^2} = S$. (1 pt) (1)
- c) $S = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$, donc $OH = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$. Base OAB rectangle en O d'aire $\frac{1 \times 2}{2} = 1$, hauteur $OC = 2 : V = \frac{1}{3} \times 1 \times 2 = \frac{2}{3}$. Avec la base ABC et la hauteur $OH : \mathcal{A}_{ABC} = \frac{3V}{OH} = \frac{2}{\sqrt{6}/3} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$. (Contrôle : $AB = AC = \sqrt{5}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1$, $\cos \widehat{BAC} = \frac{1}{5}$, $\sin \widehat{BAC} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ et $\frac{1}{2} \times 5 \times \frac{2\sqrt{6}}{5} = \sqrt{6}$.) (1 pt) (1)
- d) Le volume se calcule de deux façons : $V = \frac{1}{3} \times \frac{ab}{2} \times c = \frac{abc}{6}$ et $V = \frac{1}{3} \mathcal{A}_{ABC} \times OH$. Donc $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{abc}{2OH}$ et $\mathcal{A}_{ABC}^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{4} S = \frac{b^2 c^2 + a^2 c^2 + a^2 b^2}{4}$. Or les triangles OAB, OBC, OCA sont rectangles en $O : \mathcal{A}_{OAB} = \frac{ab}{2}, \mathcal{A}_{OBC} = \frac{bc}{2}, \mathcal{A}_{OCA} = \frac{ca}{2}$, dont la somme des carrés vaut aussi $\frac{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}{4}$. (1 pt) (1)

Méthode — Calculer un même volume de deux façons, avec deux choix de base, est une technique très efficace pour obtenir une aire ou une distance sans aucun calcul d'angle.