

Devoir surveillé – Géométrie dans l'espace : vecteurs, droites, plans et produit scalaire — niveau ★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Nom : _____

Date : _____

Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Automatismes

(3 pts)

- a) Déterminer le réel m pour lequel les vecteurs $\vec{u}(2; -1; 3)$ et $\vec{v}(1; 4; m)$ sont orthogonaux.
- b) Les plans $\mathcal{P} : 3x - y + 2z + 5 = 0$ et $\mathcal{Q} : -6x + 2y - 4z + 1 = 0$ sont-ils parallèles ? Sont-ils confondus ?
- c) Donner une équation cartésienne du plan passant par $A(2; 0; -1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(1; -3; 4)$.

Exercice 2 – Positions relatives de droites

(4 pts)

- a) On considère les droites $d_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 3 - t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ et $d_2 : \begin{cases} x = 4 + s \\ y = 1 - s \\ z = -2 + s \end{cases} (s \in \mathbb{R})$. Donner un vecteur directeur de chaque droite et montrer que d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.
- b) Montrer que d_1 et d_2 ne sont pas sécantes. Que peut-on en conclure ?
- c) Montrer que les droites d_1 et d_2 sont orthogonales.
- d) Soit $d_3 : \begin{cases} x = -4k \\ y = 2 - 2k \\ z = 1 + 2k \end{cases} (k \in \mathbb{R})$. Étudier la position relative des droites d_1 et d_3 .

Exercice 3 – Vrai ou faux ?

(4 pts)

- a) Indiquer si chaque affirmation est vraie ou fausse, en justifiant soigneusement. Affirmation 1 : les points $A(1; 2; 3)$, $B(2; 4; 5)$, $C(4; 8; 9)$ et $D(0; 0; 2)$ sont coplanaires.
- b) Affirmation 2 : la droite d de représentation paramétrique $x = 1 + t$, $y = 2 - t$, $z = 3t$ ($t \in \mathbb{R}$) est strictement parallèle au plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x + 5y + z - 12 = 0$.
- c) Affirmation 3 : pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace, $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$.
- d) Affirmation 4 : le point $H(1; 1; 1)$ est le projeté orthogonal du point $E(3; 2; 3)$ sur le plan $\mathcal{Q}$ d'équation $2x + y + 2z - 5 = 0$, et la distance du point E au plan $\mathcal{Q}$ vaut 3.

Exercice 4 – Problème — Volume d'une pyramide**(5 pts)**

- a) On considère les points $A(1; 0; 1)$, $B(3; 2; 0)$, $C(0; -2; 1)$ et $S(5; 0; 6)$. Montrer que les points A , B et C définissent un plan.
- b) Montrer que le vecteur $\vec{n}(2; -1; 2)$ est normal au plan (ABC) et en déduire une équation cartésienne de ce plan.
- c) Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$, AB et AC . En déduire la valeur exacte de $\cos \widehat{BAC}$, puis une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ arrondie au dixième de degré.
- d) On rappelle que l'aire d'un triangle ABC vaut $\frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \widehat{BAC}$. Montrer que l'aire du triangle ABC vaut $\frac{3}{2}$.
- e) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par S et orthogonale au plan (ABC) , puis les coordonnées du point d'intersection H de Δ et de (ABC) .
- f) Calculer SH , puis le volume de la pyramide $SABC$ (on rappelle que $V = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$).

Exercice 5 – Démontrer — Dans un tétraèdre régulier**(4 pts)**

- a) $ABCD$ est un tétraèdre régulier d'arête a (ses quatre faces sont des triangles équilatéraux). Justifier que $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AD} = \frac{a^2}{2}$.
- b) Exprimer $\vec{CD}$ en fonction de $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$, puis montrer que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.
- c) On note I le milieu de $[CD]$. Montrer que $\vec{AI} = \frac{1}{2} (\vec{AC} + \vec{AD})$, puis calculer $\vec{AI} \cdot \vec{CD}$.
- d) Montrer de même que $\vec{BI} \cdot \vec{CD} = 0$, puis que la droite (CD) est orthogonale au plan (ABI) . Retrouver ainsi le résultat de la question b).

Bon courage !