

Corrigé et barème – Géométrie dans l'espace : vecteurs, droites, plans et produit scalaire — niveau ★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Exercice 1 – Automatismes

(3 pts)

- a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 1 + (-1) \times 4 + 3m = 3m - 2$; ce produit scalaire est nul si et seulement si $m = \frac{2}{3}$. (1 pt) (1)
- b) $\vec{n}_{\mathcal{P}}(3; -1; 2)$ et $\vec{n}_{\mathcal{Q}}(-6; 2; -4) = -2\vec{n}_{\mathcal{P}}$: les vecteurs normaux sont colinéaires, les plans sont parallèles. Le point $(0; 5; 0)$ appartient à $\mathcal{P}$ ($-5 + 5 = 0$) mais pas à $\mathcal{Q}$ ($10 + 1 = 11 \neq 0$) : les plans sont strictement parallèles, non confondus. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)
- c) Une équation est $x - 3y + 4z + d = 0$ avec $2 - 0 - 4 + d = 0$, d'où $d = 2$: $x - 3y + 4z + 2 = 0$. (1 pt) (1)

Erreur fréquente — Des vecteurs normaux colinéaires donnent des plans parallèles, pas forcément confondus : il faut encore tester un point de l'un dans l'équation de l'autre.

Exercice 2 – Positions relatives de droites

(4 pts)

- a) $\vec{u}_1(2; 1; -1)$ dirige d_1 et $\vec{u}_2(1; -1; 1)$ dirige d_2 . Si $\vec{u}_2 = k\vec{u}_1$, les abscisses imposent $k = \frac{1}{2}$ et les ordonnées $k = -1$: contradiction. Les vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires, les droites ne sont pas parallèles. (1 pt) (1)
- b) Un point commun correspondrait à des réels t, s tels que $1 + 2t = 4 + s$, $-1 + t = 1 - s$ et $3 - t = -2 + s$. La deuxième équation donne $s = 2 - t$, puis la première $1 + 2t = 6 - t$, soit $t = \frac{5}{3}$ et $s = \frac{1}{3}$. Dans la troisième : $3 - \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$ alors que $-2 + \frac{1}{3} = -\frac{5}{3}$; le système n'a pas de solution. Les droites n'étant ni parallèles ni sécantes, elles sont non coplanaires. (1,5 pt) (1)
- c) $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 2 \times 1 + 1 \times (-1) + (-1) \times 1 = 0$: les droites d_1 et d_2 sont orthogonales (mais pas perpendiculaires, puisqu'elles ne se coupent pas). (0,5 pt) (1)
- d) $\vec{u}_3(-4; -2; 2) = -2\vec{u}_1$: les droites d_1 et d_3 sont parallèles. Le point $M(0; 2; 1)$ de d_3 (obtenu pour $k = 0$) est-il sur d_1 ? $1 + 2t = 0$ donne $t = -\frac{1}{2}$, puis $y = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \neq 2$: non. Les droites d_1 et d_3 sont strictement parallèles. (1 pt) (1)

Piège — Dans l'espace, deux droites orthogonales peuvent ne pas se couper : « orthogonales » ne concerne que les directions, « perpendiculaires » exige en plus un point commun.

Exercice 3 – Vrai ou faux ?

(4 pts)

- a) VRAIE. $\overrightarrow{AB}(1; 2; 2)$ et $\overrightarrow{AC}(3; 6; 6) = 3\overrightarrow{AB}$: les points A, B, C sont alignés. Une droite et un point sont toujours contenus dans un même plan, donc les quatre points sont coplanaires, quel que soit D . (1 pt) (1)
- b) FAUSSE. Pour tout réel t : $2(1+t) + 5(2-t) + 3t - 12 = 2 + 2t + 10 - 5t + 3t - 12 = 0$. Tous les points de d appartiennent à $\mathcal{P}$: la droite d est contenue dans $\mathcal{P}$, elle n'est donc pas strictement parallèle à ce plan. (1 pt) (1)
- c) FAUSSE. $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$: l'égalité n'a lieu que si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Contre-exemple : $\vec{u} = \vec{v} = (1; 0; 0)$ donne $\|2\vec{u}\|^2 = 4$ alors que $\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 = 2$. (1 pt) (1)
- d) VRAIE. $2 + 1 + 2 - 5 = 0$, donc $H \in \mathcal{Q}$. $\overrightarrow{EH}(-2; -1; -2) = -\vec{n}$ où $\vec{n}(2; 1; 2)$ est normal à $\mathcal{Q}$: la droite (EH) est orthogonale à $\mathcal{Q}$. H est donc le projeté orthogonal de E sur $\mathcal{Q}$, et la distance de E au plan vaut $EH = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$. (1 pt) (1)

Astuce — Trois points alignés parmi quatre rendent les quatre points coplanaires : avant tout calcul de coplanarité, on regarde si deux des vecteurs sont déjà colinéaires.

Exercice 4 – Problème — Volume d'une pyramide

(5 pts)

- a) $\overrightarrow{AB}(2; 2; -1)$ et $\overrightarrow{AC}(-1; -2; 0)$. Si $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, les cotes imposent $0 = -k$, soit $k = 0$, et $\overrightarrow{AC}$ serait nul : impossible. Les vecteurs ne sont pas colinéaires, les points ne sont pas alignés et définissent un plan. (0,5 pt) (0,833333)
- b) $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 4 - 2 - 2 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = -2 + 2 + 0 = 0$: $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan, il lui est normal. Équation $2x - y + 2z + d = 0$; avec A : $2 - 0 + 2 + d = 0$, donc $d = -4$. $(ABC) : 2x - y + 2z - 4 = 0$. (1 pt) (0,833333)
- c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times (-1) + 2 \times (-2) + (-1) \times 0 = -6$; $AB = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$; $AC = \sqrt{1 + 4 + 0} = \sqrt{5}$. Donc $\cos \widehat{BAC} = \frac{-6}{3\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}} \approx -0,894$, d'où $\widehat{BAC} \approx 153,4^\circ$. (1 pt) (0,833333)
- d) $\sin^2 \widehat{BAC} = 1 - \cos^2 \widehat{BAC} = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$ et le sinus d'un angle compris entre 0° et 180° est positif, donc $\sin \widehat{BAC} = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Aire = $\frac{1}{2} \times 3 \times \sqrt{5} \times \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{3}{2}$. (1 pt) (0,833333)
- e) Δ est dirigée par $\vec{n} : x = 5 + 2t, y = -t, z = 6 + 2t$ ($t \in \mathbb{R}$). Intersection : $2(5 + 2t) - (-t) + 2(6 + 2t) - 4 = 0 \iff 18 + 9t = 0 \iff t = -2$. D'où $H(1; 2; 2)$ (contrôle : $2 - 2 + 4 - 4 = 0$). (1 pt) (0,833333)
- f) $\overrightarrow{SH}(-4; 2; -4)$, donc $SH = \sqrt{16 + 4 + 16} = 6$. SH est la hauteur issue de S : $V = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \times 6 = 3$ unités de volume. (0,5 pt) (0,833333)

Méthode — La hauteur d'une pyramide issue d'un sommet s'obtient grâce au projeté orthogonal de ce sommet sur le plan de la base : droite orthogonale, point d'intersection, puis distance.

Exercice 5 – Démontrer — Dans un tétraèdre régulier

(4 pts)

- a) Le triangle ABC est équilatéral de côté a : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos 60^\circ = a \times a \times \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}$.
Même calcul dans le triangle équilatéral ABD pour $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$. (1 pt) (1)
- b) Relation de Chasles : $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$. Par bilinéarité, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0$: les droites (AB) et (CD) sont orthogonales. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)
- c) $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$. Alors $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}(AD^2 - AC^2) = \frac{1}{2}(a^2 - a^2) = 0$. (1 pt) (1)
- d) De même, $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD})$ et $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}$, d'où $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(BD^2 - BC^2) = 0$. Les points A, B, I ne sont pas alignés : sinon B serait sur la droite (AI) , contenue dans le plan (ACD) , alors que $B \notin (ACD)$. Ainsi $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BI}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan (ABI) , orthogonaux à $\overrightarrow{CD}$: (CD) est orthogonale au plan (ABI) , donc à toute droite de ce plan, en particulier à (AB) . (1 pt) (1)

Astuce — Sans repère, on décompose les vecteurs avec la relation de Chasles vers des vecteurs dont on connaît les produits scalaires : ici, tout se ramène à $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.