

Corrigé et barème – Géométrie dans l'espace : vecteurs, droites, plans et produit scalaire — niveau ★

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Exercice 1 – Automatismes

(5 pts)

- a) $\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$. (1 pt) (1)
- b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 2 + 2 \times (-1) + (-2) \times 0 = 2 - 2 + 0 = 0$: les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux. (0,5 pt calcul + 0,5 pt conclusion) (1)
- c) Si $\vec{w} = k\vec{u}$, les abscisses imposent $k = 3$, mais alors l'ordonnée de $\vec{w}$ vaudrait $3 \times 2 = 6 \neq 1$. Aucun réel k ne convient : $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires. (1 pt) (1)
- d) $\vec{u} + \vec{v} = (1 + 2; 2 - 1; -2 + 0) = (3; 1; -2) = \vec{w}$. Le vecteur $\vec{w}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$: les trois vecteurs sont coplanaires (ils ne forment donc pas une base de l'espace). (0,5 pt vérification + 0,5 pt conclusion) (1)
- e) $\overrightarrow{MN}(3 - 1; -1 - 0; 4 - 2) = (2; -1; 2)$, donc $MN = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$. (1 pt) (1)

Méthode — Pour l'orthogonalité, on calcule le produit scalaire en coordonnées ; pour la colinéarité, on cherche un coefficient k commun à toutes les coordonnées : une seule coordonnée qui ne suit pas suffit à conclure.

Exercice 2 – Une droite et un plan

(5 pts)

- a) $\overrightarrow{AB}(1; 1; -2)$ dirige (AB) , qui passe par $A : (AB) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 2 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. (1 pt) (1,25)
- b) $x = 0$ impose $1 + t = 0$, soit $t = -1$; alors $y = -1$ (cela convient) mais $z = 2 - 2 \times (-1) = 4 \neq 5$. Donc $D \notin (AB)$. (1 pt) (1,25)
- c) Les coefficients de l'équation donnent $\vec{n}(2; -1; 1)$, normal à $\mathcal{P}$. $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 1 \times 2 + 1 \times (-1) + (-2) \times 1 = -1 \neq 0$: le vecteur directeur de (AB) n'est pas orthogonal à $\vec{n}$, donc (AB) n'est pas parallèle à $\mathcal{P}$; elle le coupe en un unique point. (0,5 pt + 1 pt) (1,25)
- d) Un point de (AB) est dans $\mathcal{P}$ si et seulement si $2(1 + t) - t + (2 - 2t) - 1 = 0 \iff 3 - t = 0 \iff t = 3$. D'où $I(1 + 3; 3; 2 - 6)$, soit $I(4; 3; -4)$. Vérification : $2 \times 4 - 3 + (-4) - 1 = 0$. (1,5 pt) (1,25)

Méthode — Pour couper une droite par un plan, on injecte la représentation paramétrique dans l'équation cartésienne : on obtient une équation d'inconnue t , puis on reporte la valeur trouvée dans la représentation.

Exercice 3 – Équation d'un plan et projeté orthogonal

(5 pts)

- a) $\overrightarrow{AB}(-1; 2; 0)$ et $\overrightarrow{AC}(-1; 0; 2)$. Si $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, les abscisses donnent $k = 1$ et les ordonnées $0 = 2$: impossible. Les vecteurs ne sont pas colinéaires, donc A, B, C ne sont pas alignés et définissent un plan. (1 pt) (1)
- b) $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = -2 + 2 + 0 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = -2 + 0 + 2 = 0$. Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : il est normal à ce plan. (1,5 pt) (1)
- c) Une équation est de la forme $2x + y + z + d = 0$. Comme A appartient au plan : $2 + d = 0$, donc $d = -2$. $(ABC) : 2x + y + z - 2 = 0$ (contrôle : B donne $2 - 2 = 0$ et C donne $2 - 2 = 0$). (1 pt) (1)
- d) $2 \times 1 + 1 + (-1) - 2 = 0$: oui, E appartient au plan (ABC) . (0,5 pt) (1)
- e) La droite passant par O et dirigée par $\vec{n}$ a pour représentation paramétrique $x = 2t, y = t, z = t$ ($t \in \mathbb{R}$). Elle coupe le plan lorsque $4t + t + t - 2 = 0$, soit $t = \frac{1}{3}$: $H\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$. Alors $OH = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$. (1 pt) (1)

Piège — Un vecteur normal doit être orthogonal à deux vecteurs NON colinéaires du plan : un seul produit scalaire nul ne suffit pas à conclure.

Exercice 4 – Dans un cube

(5 pts)

- a) $B(1; 0; 0), D(0; 1; 0), E(0; 0; 1)$ et $G(1; 1; 1)$, car $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$. (1 pt) (1,25)
- b) $\overrightarrow{AG}(1; 1; 1), \overrightarrow{BD}(-1; 1; 0)$ et $\overrightarrow{BE}(-1; 0; 1)$. $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = -1 + 1 + 0 = 0$ et $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} = -1 + 0 + 1 = 0$. (1,5 pt) (1,25)
- c) Si $\overrightarrow{BE} = k\overrightarrow{BD}$, les abscisses donnent $k = 1$ et les ordonnées $0 = 1$: impossible, donc $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan (BDE) , tous deux orthogonaux à $\overrightarrow{AG}$. La droite (AG) est donc orthogonale au plan (BDE) et $\overrightarrow{AG}(1; 1; 1)$ en est un vecteur normal. Équation $x + y + z + d = 0$; avec $B : 1 + d = 0$, d'où $(BDE) : x + y + z - 1 = 0$. (1,5 pt) (1,25)
- d) $(AG) : x = t, y = t, z = t$ ($t \in \mathbb{R}$). $t + t + t - 1 = 0 \iff t = \frac{1}{3}$, donc $K\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$. Alors $\overrightarrow{AK}\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$. (1 pt) (1,25)

Astuce — Dans un cube muni du repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, toutes les coordonnées des sommets valent 0 ou 1 : on les lit en suivant les arêtes depuis A .