

Devoir surveillé – Fonction exponentielle et fonction logarithme népérien — niveau ★★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Nom : _____

Date : _____

Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Démontrer

(4 pts)

- a) Démontrer que, pour tout réel $x > 0$, $\ln x \leq x - 1$.
- b) En déduire que, pour tout réel $x > 0$, $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$.
- c) En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, $\frac{1}{n+1} \leq \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$.
- d) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$, puis la limite de la suite de terme général $u_n = e^{n \ln(1 + \frac{1}{n})}$, que l'on note $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Exercice 2 – Calculs exigeants

(4 pts)

- a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^x - 6e^{-x} = 1$.
- b) Résoudre l'inéquation $\ln(x+1) + \ln(x-1) \leq \ln(3x-3)$.
- c) Résoudre l'équation $\ln(e^{2x} - 1) = x + \ln 2$.
- d) Montrer que, pour tout réel x , $\ln(1 + e^x) - x = \ln(1 + e^{-x})$. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(1 + e^x) - x)$ et interpréter graphiquement.

Exercice 3 – Problème — Une culture de bactéries

(6 pts)

Le nombre de bactéries d'une culture, t heures après son début, est modélisé par $N(t) = \frac{1000}{1 + 9e^{-0,4t}}$ pour $t \geq 0$. a) Calculer $N(0)$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t)$, puis interpréter.

- a) Montrer que, pour tout $t \geq 0$, $N'(t) = \frac{3600 e^{-0,4t}}{(1 + 9e^{-0,4t})^2}$ et en déduire le sens de variation de N .
- b) Déterminer à partir de quel instant la culture compte au moins 800 bactéries (valeur exacte, puis arrondie au centième d'heure).
- c) Montrer que, pour tout $t \geq 0$, $N'(t) = 0,4 N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{1000}\right)$.
- d) En déduire, sans calculer de dérivée seconde, l'instant où la vitesse de croissance de la culture est maximale, ainsi que cette vitesse maximale.

Exercice 4 – Pour aller plus loin — Combien de solutions ?**(6 pts)**

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{\ln x}{x}$. a) Étudier g : limites aux bornes, dérivée, tableau de variations.

- a) Soit m un réel. Discuter, selon les valeurs de m , le nombre de solutions sur $]0; +\infty[$ de l'équation $\ln x = mx$.
- b) On note π^e le nombre $e^{\ln \pi}$. Sans calculatrice, comparer e^π et π^e .
- c) Généralisation : soit $a > 0$. En posant $t = e^x$, déterminer selon a le nombre de solutions réelles de l'équation $e^x = ax$.
- d) Interpréter graphiquement le cas $a = e$.

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).