

Corrigé et barème – Fonction exponentielle et fonction logarithme népérien — niveau ★★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Exercice 1 – Démontrer

(4 pts)

- a) Soit $\varphi(x) = \ln x - x + 1$ sur $]0; +\infty[$. $\varphi'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$, du signe de $1-x$: φ croît sur $]0; 1]$, décroît sur $[1; +\infty[$, et son maximum est $\varphi(1) = 0$. Donc $\varphi(x) \leq 0$, soit $\ln x \leq x - 1$ pour tout $x > 0$. (1 pt) (1)
- b) Pour $x > 0$, $\frac{1}{x} > 0$: on applique a) à $\frac{1}{x}$, d'où $\ln \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x} - 1$, soit $-\ln x \leq \frac{1}{x} - 1$, donc $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$. (1 pt) (1)
- c) On prend $x = 1 + \frac{1}{n} > 0$. Par a) : $\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$. Par b) : $\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$. (1 pt) (1)
- d) En multipliant par $n > 0$: $\frac{n}{n+1} \leq n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq 1$. Or $\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \rightarrow 1$; par le théorème des gendarmes, $n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow 1$ (0,5 pt). La fonction $\exp$ étant continue en 1, $u_n \rightarrow e^1 = e$. (0,5 pt) (1)

Méthode — Une inégalité démontrée pour tout $x > 0$ peut être appliquée à $\frac{1}{x}$ ou à $1 + \frac{1}{n}$: ce changement de point de vue fournit gratuitement de nouvelles inégalités, puis un encadrement.

Exercice 2 – Calculs exigeants

(4 pts)

- a) On multiplie par $e^x > 0$: $e^{2x} - 6 = e^x$. Avec $X = e^x > 0$: $X^2 - X - 6 = 0 \iff (X-3)(X+2) = 0$. $X = -2$ est exclu ($X > 0$), donc $e^x = 3$ et $\mathcal{S} = \{\ln 3\}$. (1 pt) (1)
- b) Sens si $x+1 > 0$, $x-1 > 0$ et $3x-3 > 0$, soit $x > 1$. Alors l'inéquation s'écrit $\ln((x+1)(x-1)) \leq \ln(3(x-1)) \iff x^2 - 1 \leq 3x - 3 \iff x^2 - 3x + 2 \leq 0 \iff (x-1)(x-2) \leq 0 \iff 1 \leq x \leq 2$. Avec $x > 1$: $\mathcal{S} =]1; 2]$. (1 pt) (1)
- c) Sens si $e^{2x} > 1$, soit $x > 0$. Alors $\ln(e^{2x} - 1) = \ln(2e^x) \iff e^{2x} - 1 = 2e^x$. Avec $X = e^x$: $X^2 - 2X - 1 = 0$, $\Delta = 8$, $X = 1 \pm \sqrt{2}$. Seul $X = 1 + \sqrt{2}$ est positif, et $1 + \sqrt{2} > 1$ donne bien $x = \ln(1 + \sqrt{2}) > 0$. $\mathcal{S} = \{\ln(1 + \sqrt{2})\}$. (1 pt) (1)
- d) $\ln(1 + e^x) - x = \ln(1 + e^x) - \ln(e^x) = \ln \frac{1 + e^x}{e^x} = \ln(e^{-x} + 1)$ (0,5 pt). Quand $x \rightarrow +\infty$, $e^{-x} \rightarrow 0$ et, par continuité de $\ln$ en 1, la limite vaut $\ln 1 = 0$: la droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe de $x \mapsto \ln(1 + e^x)$ en $+\infty$. (0,5 pt) (1)

Astuce — Écrire $x = \ln(e^x)$ permet de regrouper $\ln(\dots) - x$ en un seul logarithme : une forme indéterminée devient une limite immédiate.

Exercice 3 – Problème — Une culture de bactéries

(6 pts)

- a) $N(0) = \frac{1000}{1+9} = 100$ (0,5 pt). $e^{-0,4t} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$, donc $N(t) \rightarrow \frac{1000}{1} = 1000$: la culture part de 100 bactéries et sa taille se stabilise vers 1000. (0,5 pt) (1,2)
- b) $N = \frac{1000}{v}$ avec $v(t) = 1 + 9e^{-0,4t}$, $v'(t) = -3,6e^{-0,4t}$. Donc $N'(t) = -\frac{1000 v'(t)}{v(t)^2} = \frac{3600 e^{-0,4t}}{(1 + 9e^{-0,4t})^2}$ (0,5 pt). Numérateur et dénominateur sont strictement positifs : N est strictement croissante sur $[0; +\infty[$. (0,5 pt) (1,2)
- c) $N(t) \geq 800 \iff 1 + 9e^{-0,4t} \leq \frac{1000}{800} = 1,25 \iff e^{-0,4t} \leq \frac{0,25}{9} = \frac{1}{36} \iff -0,4t \leq -\ln 36 \iff t \geq \frac{\ln 36}{0,4} = 5 \ln 6$ (0,5 pt). $5 \ln 6 \approx 8,96$ h : environ 8 h 58 min. (0,5 pt) (1,2)
- d) Posons $u = 9e^{-0,4t}$, de sorte que $N = \frac{1000}{1+u}$. Alors $1 - \frac{N}{1000} = 1 - \frac{1}{1+u} = \frac{u}{1+u}$, d'où $0,4N \left(1 - \frac{N}{1000}\right) = 0,4 \times \frac{1000}{1+u} \times \frac{u}{1+u} = \frac{400u}{(1+u)^2} = \frac{3600 e^{-0,4t}}{(1 + 9e^{-0,4t})^2} = N'(t)$. (1,5 pt) (1,2)
- e) On a $N'(t) = \psi(N(t))$ avec $\psi(y) = 0,4y - 0,0004y^2$, trinôme de coefficient dominant négatif, maximal en $y = \frac{0,4}{2 \times 0,0004} = 500$ (0,5 pt). N est continue, strictement croissante, de $N(0) = 100$ vers 1000 : elle prend la valeur 500 une seule fois, quand $1 + 9e^{-0,4t} = 2 \iff e^{-0,4t} = \frac{1}{9} \iff t = \frac{\ln 9}{0,4} = 5 \ln 3 \approx 5,49$ h (0,5 pt). Vitesse maximale : $\psi(500) = 0,4 \times 500 \times 0,5 = 100$ bactéries par heure. (0,5 pt) (1,2)

Erreur fréquente — La vitesse de croissance est $N'(t)$, pas $N(t)$: l'instant où la population croît le plus vite n'est pas celui où elle est la plus grande, mais celui où elle atteint la moitié de sa valeur limite.

Exercice 4 – Pour aller plus loin — Combien de solutions ?

(6 pts)

- a) $g'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, du signe de $1 - \ln x$: g strictement croissante sur $]0; e]$, strictement décroissante sur $[e; +\infty[$, maximum $g(e) = \frac{1}{e}$ (1 pt). En 0^+ : $\ln x \rightarrow -\infty$ et $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$, donc $g(x) \rightarrow -\infty$; en $+\infty$: $g(x) \rightarrow 0$ par croissances comparées. (0,5 pt) (1,2)
- b) Pour $x > 0$, $\ln x = mx \iff g(x) = m$. Sur $]0; e]$, g est continue et strictement croissante de $-\infty$ à $\frac{1}{e}$; sur $]e; +\infty[$, strictement décroissante de $\frac{1}{e}$ vers 0, avec $g(x) > 0$ (car $\ln x > 0$). Par le théorème des valeurs intermédiaires (cas strictement monotone) : si $m > \frac{1}{e}$, aucune solution ; si $m = \frac{1}{e}$, une seule ($x = e$) ; si $0 < m < \frac{1}{e}$, deux solutions. (1,2)
- c) $\pi > e$ et g est strictement décroissante sur $[e; +\infty[$, donc $g(\pi) < g(e) = \frac{1}{e}$. (1,2)
- d) Comme $e^x > 0$ et $a > 0$, toute solution vérifie $x > 0$. La fonction $x \mapsto e^x$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0; +\infty[$; avec $t = e^x$, $x = \ln t$ et l'équation devient $t = a \ln t \iff \frac{\ln t}{t} = \frac{1}{a}$, c'est-à-dire $\ln t = \frac{1}{a} t$: les solutions en x et en t se correspondent une à une (0,5 pt). On applique b) avec $m = \frac{1}{a} > 0$: si $a > e$ ($\frac{1}{a} < \frac{1}{e}$), deux solutions ; si $a = e$, une seule ($t = e$, soit $x = 1$) ; si $a < e$ ($\frac{1}{a} > \frac{1}{e}$), aucune solution. (1,2)
- e) Pour $a = e$, la droite $y = ex$ touche la courbe de $\exp$ en un seul point, $(1; e)$: c'est la tangente en 1, puisque $y = e^1(x - 1) + e^1 = ex$. Pour $a > e$ la droite coupe la courbe deux fois, pour $a < e$ elle passe en dessous. (0,5 pt) (1,2)

Piège — Dans une discussion selon un paramètre, le cas limite ($m = \frac{1}{e}$) et le cas $m \leq 0$ doivent être traités à part : ce sont eux qu'on oublie le plus souvent.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).